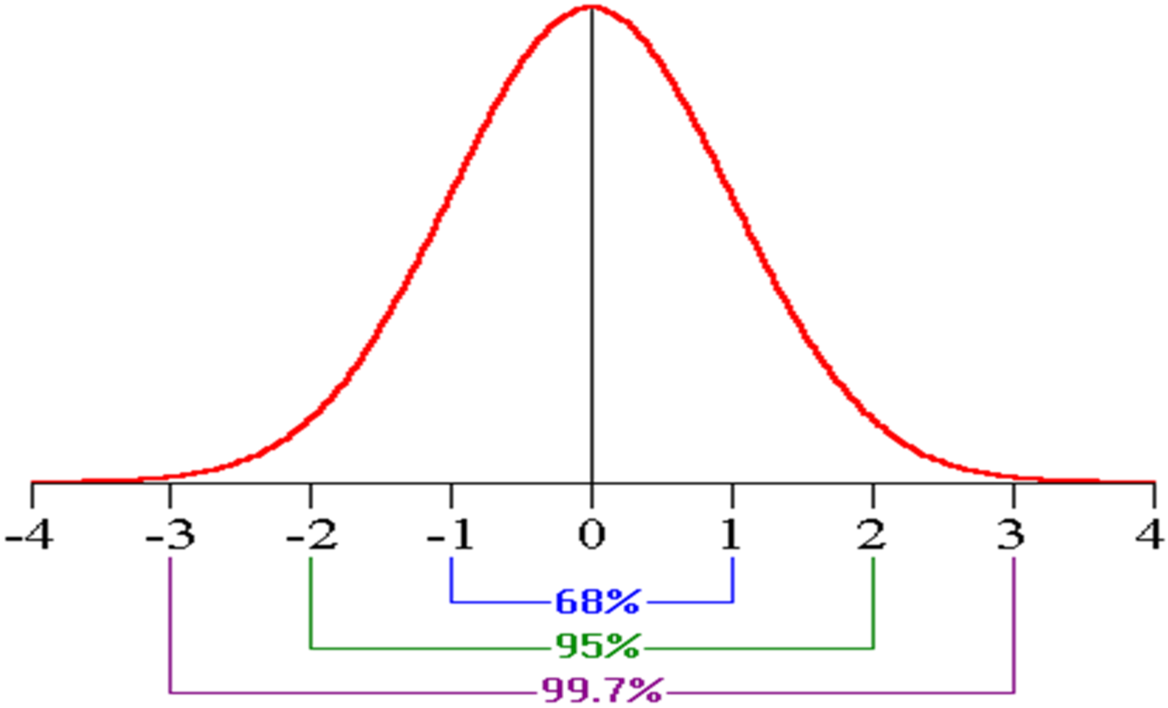
Professeur S. BENHMIDA

F.S.J.E.S. Fès

Calcul des Probabilités



Filière: Economie et Gestion

Module: Probabilités

Année universitaire 2014/2015
2ème semestre, Sections C & D

S. BENHMIDA F.S.J.E.S

Année universitaire 2014/2015
2ème semestre

Calcul des Probabilités

Filière: Economie et Gestion

Module: Probabilités

Sections C & D

1

Introduction générale

Actuellement on fait recours au calcul des probabilités dans plusieurs domaines, notamment dans le domaine des sciences économiques et sociales, et cela pour la simple raison, qu'on y est confronté à des phénomènes aléatoires, c.à.d des phénomènes dont on ne peut pas connaître ou prévoir avec certitude les résultats.

2

Cet aléa ou hasard est dû généralement à la complexité du phénomène étudié (ou /et) à un manque d'informations.

Exemples :

- Prévoir, le temps qui fera demain, ou le prix d'une action boursière.
- Estimer la proportion des boîtes de conserves abîmées dans un grand lot de boîtes de conserves.

3

L'étude de chaque phénomène commence par La collecte des informations et se termine par sa modélisation, afin de tirer des conclusions et prendre des décisions.

la modélisation du phénomène étudié, qui consiste à déterminer un modèle qui explique le mieux possible ce phénomène, en se basant sur les résultats de la statistique descriptive, et la théorie des probabilités.

D'où, l'intérêt d'un cours de calcul des probabilités

4

Programme

Chapitre 1: Outils mathématiques
- Théorie élémentaire des ensembles
- Analyse combinatoire

Chapitre 2: Notion de probabilité et généralités
- Définitions et vocabulaire
- Propriétés d'une loi de probabilité

5

Chapitre 3 : Variables aléatoires
- Définition
- Loi d'une variable aléatoire
- Caractéristiques d'une variable aléatoire
- Couple de variables aléatoires

Chapitre 4 : Lois de probabilité discrètes usuelles

Chapitre 5 : Lois de probabilité continues et lois usuelles

6

Bibliographie

- C. ATLAN & G. TRIGANO (Math 108)
  Mathématiques appliquées à la gestion : Exercices corrigés (Chap. de 1 à 5)
- M. N. BOULIF (Stat 9)
  Calcul des probabilités
  (50 épreuves d'examens corrigées)
- Cyrille CRAPSKY (Stat 88)
  Probabilités pour l'économie
  (Cours avec exercices corrigés)
- A. GAGOU (Stat 114)
  Introduction aux probabilités
  (Cours avec exercices corrigés)

7

- B. GOLDFARB & C. PARDOUX (Stat 111)
  Introduction à la méthode statistique
  (Chap. 5, 6 et 7)
- Bernard GRAIS (Stat 22)
  Méthodes statistiques (Chap. I, II et III).
- A. ELMARHOUM & M. DIOURI (Stat 122)
  Probabilités (Cours + exercices corrigés)
- K. MESLOUHI (Stat 81)
  Calcul des probabilités
  (Cours + exercices corrigées)
- R. SANDRETTO (Stat 113)
  Probabilités (Chap. 2 – 5)
  (Rappels de cours + exercices corrigés)

8

Chapitre 1

Outils mathématiques

9

Historiquement, on a considéré la probabilité d'un événement, comme le rapport du nombre de cas favorables à sa réalisation sur le nombre de tous les cas possibles pour l'expérience aléatoire étudiée, et cela suppose que tous les cas possibles ont la même probabilité (équiprobabilité) et que leur nombre est fini. Car parfois l'une (ou/et) l'autre de ces deux hypothèses ne sont pas vérifiées.

Mais, dans la pratique on rencontre des expériences où ces hypothèses sont bien vérifiées. D'où, pour calculer les probabilités, dans de telles situations, on a besoin de deux outils, la *théorie des ensembles* et *l'analyse combinatoire*, le premier pour la formulation des événements et le deuxième pour calculer leurs probabilités.

10

I) Théorie élémentaire des ensembles

1) Définitions, vocabulaire et notations

- ☞ Ensemble : groupe d'individus appelés *éléments*.
- ☞ Pour un élément e d'un ensemble E, on dit que , « e appartient à E », et on note : $e \in E$.
- ☞ Pour un ensemble E de n éléments e_1, e_2, …, e_n, on écrit: $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Parfois les éléments sont définis par une formule ou une expression.

11

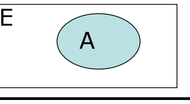
Exemples :

- $E = \{n \in \mathbb{N} \,/\, 4n-1 > 15\}$
- $F = \{(m, n)$, m et n entiers $/ 1 \le m \le 6$ et $1 \le n \le 6\}$
- G= {Tous les étudiants inscrits dans le module M.Q II en 2013 }.

☞ Si E est vide on note E = Ø.

☞ Un ensemble A est un *sous-ensemble* (ou une *partie*) de E, si tous les éléments de A appartiennent à E. On note $A \subset E$ (ou $E \supset A$) et on dit que A est *inclus* dans E.

Par un diagramme de Venn on a:



12

☞ Pour un ensemble E non vide, on note par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Si A est un sous ensemble de E, on écrit,

$A \subset E$ mais $A \in \mathscr{P}(E)$

Exemple:

Si $E = \{a, b, c\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, E\}$.

$A=\{a, b\} \subset E$ et $A \in \mathscr{P}(E)$.

13

☞ L'intersection de deux sous ensembles A et B de E, que l'on note $A \cap B$ (ou AB), est un sous ensemble de E formé des éléments appartenant à A et à B.

☞ La réunion de A et B, que l'on note $A \cup B$, est un sous-ensemble de E formé des éléments appartenant à A ou à B.

Exemple:

Si $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 5\}$ et $B = \{1, 4\}$, alors:

$A \cap B = \{4\}$ et $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$.

14

☞ Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *disjoints*.

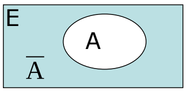
Remarque :

On a toujours,

$A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$

$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$

☞ Si $A \subset E$, on appelle *complémentaire* de A dans E, le sou ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$ ou A^c.



15

☞ La *différence* de A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B

On le note $A \cap \overline{B}$.

Mais, la différence de B et A s'écrit $\overline{A} \cap B$.

☞ La *différence symétrique* de A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou bien dans B mais pas dans $A \cap B$ On le note $A \Delta B$.

On remarque que: $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

16

☞ On appelle *partition* de E, toute famille $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de sous ensembles de E, tels que :

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$

☞ Le *produit cartésien* de deux ensembles E et F est l'ensemble de tous les couples ordonnés (x, y), où $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$.

Si E=F, alors on note $E \times E = E^2$.

Attention: généralement $E \times F \neq F \times E$.

17

☞ Plus généralement, pour n entier, on écrit:

$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ tel que: $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \ldots$ et $e_n \in E_n\}$.

$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ s'appelle un multiplet de n éléments (ou un n-uplet).

et on écrit: $E^n = E \times E \times \ldots \times E$ (n fois).

☞ Pour un ensemble E fini, de p éléments, on appelle cardinal de E le nombre de ses éléments. On note card(E)=p.

18

2) Opérations et propriétés

a) Opérateurs ∩, ∪ et ^{c}

Soient A, B et C trois sous ensembles d'un ensemble E, alors on a:

$A\cap B = B\cap A$,	$A\cup B = B\cup A$,	$A\cap \emptyset = \emptyset$,	$A\cup \emptyset = A$
$A\cap E = A$,	$A\cup E = E$,	$A\cap A^c = \emptyset$,	$A\cup A^c = E$
$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) = A\cap B\cap C$ $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) = A\cup B\cup C$ $A\cap(B\cup C) = (AB)\cup(AC)$, $A\cup(BC) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$			
$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$,	$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$,	$(A^c)^c = A$	

19

b) Opérations sur les cardinaux

- card(Ø)=0, et $card(A^c)=card(E)-card(A)$.
- Si $A\subset B$ alors $card(A)\le card(B)$.
- $card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(AB)$.

Mais si, $A\cap B=\emptyset$, alors

$card(A\cup B)=card(A)+card(B)$.

- Plus généralement, pour une famille de n ensembles A_1, A_2, …, A_n on a la formule de Poincaré:

20

$$card(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} card(A_iA_j)$$
$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} card(A_iA_jA_k) - \;.....$$
$$(-1)^{n+1} card(A_1A_2 \;.....\; A_n).$$

- Mais, si les A_i sont disjoints deux à deux, c.à.d. $A_i\cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, alors on a:

$$card(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i).$$

21

- En particulier, si A_1, A_2, …, A_n forment une partition de E, alors on a :

$$card(E) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i).$$

- $card(A\cap\bar{B})=card(A) - card(AB)$.
- $card(\bar{A}\cap B)=card(B) - card(AB)$.
- $card(E_1\times E_2\times \ldots \times E_n)$

  $= card(E_1)\times card(E_2)\times \ldots \times card(E_n)$.

Ainsi, $card(E^n)=[card(E)]^n$.

- Si card(E) = n alors card($\mathscr{P}$(E)) = 2^n

22

II) Analyse combinatoire

On considère un ensemble de *n* éléments et on cherche à étudier les différentes possibilités de regrouper ou de choisir *p* éléments parmi les *n*.

Selon le mode de choix ou de tirage des éléments et leur ordre, on distingue 4 situations.

23

1)Tirage avec remise (répétition) et avec ordre

Le nombre de possibilités pour choisir p éléments, ordonnés et avec répétition, parmi n éléments, est égal à n^p.

C'est le nombre d'arrangements avec répétition.

Remarque:

Dans ce cas p peut être supérieur à n.

24

Exemple: Combien de façons a-t-on pour composer le code secret, d'un coffre-fort, de 6 chiffres?

Réponse: On a (10^6 = 1 million) façons de le composer.

25

2) Tirage sans remise et avec ordre

Le nombre de possibilités pour choisir p éléments, ordonnés et sans répétition, parmi n éléments, est égal à:

$$n(n-1)(n-2)\times\ldots\ldots\times(n-p+1),$$

c'est le nombre d'arrangements sans répétition, que l'on note A_n^p.

Si on pose:

$n(n-1)(n-2)\times\ldots\times2\times1=n!$ (factorielle n),

alors on a: $\boxed{A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$

26

Remarques:

1) Dans ce cas il faut que p ≤ n.

2) Par convention on a $0! = 1$

3) Si p=n, alors on a, $A_n^n = n!$, qui est le nombre de permutations de n éléments différents.

Exemple: Combien de façons a-t-on pour composer le code secret, d'un coffre-fort, de 6 chiffres différents?

Réponse: On a ($A_{10}^6 = \dfrac{10!}{4!} = 151200$) façons de le composer.

27

3) Tirage sans remise et sans ordre (p ≤ n)

Le nombre de possibilités pour choisir p éléments, sans ordre et sans répétition, parmi n éléments, est égal à: $\dfrac{A_n^p}{p!}$

c'est le nombre de combinaisons, que l'on note: $\boxed{C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$

28

Exemple: Combien de façons a-t-on pour élire un bureau de 5 membres, dans une assemblée générale de 40 membres?

Réponse: On a ($C_{40}^5 = \dfrac{40!}{5!\times35!} = 658008$) façons de l'élire.

29

4) Tirage avec remise et sans ordre

Le nombre de possibilités pour choisir p éléments, sans ordre et avec répétition, parmi n éléments, est égal à C_{n+p-1}^p,

c'est le nombre de combinaisons avec répétition, que l'on note:

$$\boxed{K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}}$$

Dans ce cas p peut être supérieur à n.

30

Pour établir ce résultat on utilise la notion de permutation avec répétition.

On considère n éléments (ou objets), dont n_1 sont de type 1, n_2 sont de type 2, . . . et n_k sont de type k, avec $n_1+n_2+. . .+n_k=n$.

Des éléments sont d'un même type soit parce qu'ils sont identiques soit qu'ils sont donnés dans un ordre fixé, c.à.d, qu'on ne peut pas toucher à leur ordre mais on peut placer d'autres éléments parmi eux.

31

Le nombre de permutations de ses éléments est appelé nombre de permutations avec répétition, que l'on note $p_n(n_1, n_2, . . ., n_k)$, et il est donné par :

$$\boxed{p_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}}$$

Remarque: Si k=2, on a $n_2=n-n_1$ et

$$p_n(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} = C_n^{n_1}$$

32

Exemple: de combien de façons peut on distribuer p lettres identiques dans n boîtes aux lettres avec la possibilité de mettre plusieurs lettres dans la même boîte ?

Réponse: Distribuer les p lettres revient à choisir les p boîtes aux lettres (qui vont recevoir les lettres) parmi les n boîtes, sans ordre (lettres identiques) et avec répétition (la possibilité de choisir la même boîte plusieurs fois).

33

Donc le nombre de façons que l'on a est égal au nombre de combinaisons avec répétition de p éléments parmi n, ce qui est égal aussi au nombre de permutations avec répétition de n+p-1 objets dont (n-1) sont de type 1 (les séparateurs des boîtes) et p sont de type 2 (les lettres).

$$\boxed{K_n^p = p_{n+p-1}(n-1, p) = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1}^p}$$

A.N: Pour, n=3 et p=2, on a,

$$K_3^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

34

5) Propriétés de A_n^p et C_n^p (avec p ≤ n)

1) $A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$	2) $A_n^p = p!C_n^p$	3) $C_n^p = \frac{n}{p}C_{n-1}^{p-1}$
4) $C_n^p = C_n^{n-p}$	5) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$	6) $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$

35

6) Tableau récapitulatif

On considère le tirage de p éléments parmi n

Ordre \ Tirage	Avec remise (p quelconque)	Sans remise (p ≤ n)
Avec ordre	n^p	A_n^p
Sans ordre	K_n^p	C_n^p

36

Chapitre 2

Notion de probabilité

et généralités

37

I) Définitions et vocabulaire

On donne les définitions et le vocabulaire de bases qui seront utilisés dans les paragraphes et les chapitres suivants.

☞ Expérience (ou épreuve) aléatoire : C'est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude.

Cependant les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont connus a priori.

Exemples: - Jeter un dé à six faces.
- Tirer une boule dans un urne.

38

☞ Espace (ou ensemble) fondamental : C'est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Généralement on le note Ω (oméga).

☞ Un élément de Ω est appelé événement élémentaire (ou éventualité), on le note ω.

☞ Une partie de Ω est appelée événement.

Exemple: Pour le jet d'un dé à six faces, on a,

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3 est un événement élémentaire.

E= $\{3, 6\}$ est un événement.

39

☞ Ω est appelé événement certain.

☞ $\emptyset$ est appelé événement impossible.

☞ Deux événements A et B sont dites incompatibles s'ils ne se réalisent pas simultanément c.à.d $A \cap B = \emptyset$.

Exemple: Pour le jet d'un dé à six faces, les événements A=« avoir un nombre pair » et

B=« avoir un nombre impair » sont incompatibles

Remarque: Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

40

☞ On appelle tribu d'événements sur Ω toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) Si $E \in \mathcal{A}$, alors $E^c \in \mathcal{A}$

iii) Si $(E_i)_{i \in N}$ est une suite dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{i \in N} E_i \in \mathcal{A}$.

($\mathcal{A}$ est stable par les opérateurs $\cup$ et ^{c})

Remarque: Généralement, si Ω est fini on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et dans ce cas, la condition iii) se réduit à,

si $E_1 \in \mathcal{A}$ et $E_2 \in \mathcal{A}$, alors $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.

41

☞ Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.

☞ On appelle probabilité (ou lois de probabilité) sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0 , 1]$ vérifiant:

i) $P(\Omega) = 1$ (axiome de normalisation)

ii) Pour toute suite $(E_i)_{i \in N}$ d'événements de $\mathcal{A}$ incompatibles deux à deux, on a:

$$P\left(\bigcup_{i \in N} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

(axiome complet des probabilités totales).

42

En particulier si E_1 et E_2 sont deux événements incompatibles on a:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

Où P(E) désigne la probabilité de l'événement E.

☞ Le triplet (Ω, $\mathcal{A}$, P) est appelé espace probabilisé.

Remarque : Pour tout E ∈ $\mathcal{A}$, on a toujours,

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

☞ Si Ω est fini ou infini dénombrable, on définit une lois de probabilité comme une

43

application P de Ω dans [0 , 1] vérifiant :

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$$

Ainsi, pour déterminer la loi de probabilité, il suffit de connaître les probabilités de tous les événements élémentaires.
Et pour tout événement E⊂ Ω, on a:

$$P(E) = \sum_{\omega\in E} P(\omega)$$

44

Exemple: Soit une expérience aléatoire qui a 7 résultats possibles dont les probabilités sont les suivantes:

Evénement élémentaire ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
$P(\omega_i)$	0,2	0,1	0,1	0,3	0,15	0,05	0,1

Pour A={ω_2, ω_4, ω_5}, on a:

$$P(A) = \sum_{\omega_i\in A} P(\omega_i) = P(\omega_2) + P(\omega_4) + P(\omega_5)$$
$$= 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}55.$$

45

☞ Si Ω est fini et si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité de ces événements et que la loi de probabilité est uniforme. On montre alors que la loi de probabilité est définie par :

$$P : \Omega \longrightarrow [0\,,\,1]$$
$$\omega \longmapsto P(\omega) = 1/\mathrm{card}(\Omega)$$

Ainsi, pour tout événement E⊂ Ω, on a:

$$P(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

46

Exemple: Pour le jet d'un dé équilibré, soit A=« avoir un multiple de 3 » ={3; 6}.
La loi est uniforme et on a card(Ω)=6 et card(A)=2. Donc P(A)=2/6 =1/3=0,3333.

☞ Si A est un événement d'un espace fondamental Ω tel que P(A) ≠ 0, et B un événement quelconque de Ω, la probabilité de B sachant que A est réalisé est appelée la probabilité conditionnelle de B sachant A. On la note P(B/A) et elle est définie par :

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

47

Exemple: Pour le jet d'un dé équilibré, soient
A =« avoir un multiple de 3 » ={3; 6} ,
B = «avoir un six »= {6}.
C = «avoir un as »= {1}.
D = «avoir un nombre impair »= {1, 3, 5}.

i) A∩B = {6}, P(A)= 2/6 et P(A∩B)=1/6, donc, P(B/A)=(1/6)/(2/6) =1/2=0,5.

ii) A∩C =Ø donc P(A∩C)=0 d'où, P(C/A)=0/(2/6) =0.

iii) A∩D = {3}, P(D)= 3/6 et P(A∩D)=1/6, donc, P(D/A)=(1/6)/(2/6) =1/2=0,5=P(D).

48

On remarque que : P(B/A) =0,5>P(B)=1/6, P(C/A)=0<P(C)=1/6 et P(D/A)=P(D)=0,5.
On vérifie aussi que P(A/D)=P(A)=1/3.
On dit que les probabilités conditionnelles de B et C dépendent de la réalisation de A, alors que la probabilité conditionnelle de D est indépendante de la réalisation de A.

49

☞ Soient A et B deux événements d'un espace fondamental Ω tels que, $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on dit que A et B sont indépendants si:

P(B/A)=P(B) ou P(A/B)=P(A).

Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient indépendants est donnée par:

$P(AB)=P(A)\times P(B)$.

50

II) Propriétés d'une loi de probabilité

1) Propriétés générales

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, P). Alors on a:

☞ $P(A^c)=P(\Omega)-P(A) = 1-P(A)$.

☞ Si $A\subset B$ alors $P(A)\leq P(B)$.

☞ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Mais si, A et B sont incompatibles ($A\cap B=\emptyset$), on a: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

51

☞ Plus généralement, pour une famille de n événements A_1, A_2, …, A_n on a la formule de Poincaré: (théorème des probabilités totales)

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i A_j A_k) - \ldots\ldots (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots\ldots A_n).$$

52

☞ Mais, si les A_i sont incompatibles deux à deux, c.à.d. $A_i\cap A_j=\emptyset$ pour $i \neq j$, alors on a:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

☞ En particulier, si A_1, A_2, …, A_n forment un système complet d'événements de Ω, c.à.d. ($A_i\cap A_j=\emptyset$ pour $i \neq j$ et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) alors on a :

$$P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

53

☞ $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$ ou $P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$.

☞ $P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)$ ou $P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$.

☞ Soit C est un événements de Ω tel que $P(C)\neq 0$, alors on a:

- $P(\bar{A}/C)=1-P(A/C)$.
- $P[(A\cup B)/C]=P(A/C)+P(B/C)-P[(AB)/C]$.

Exercice: Montrer que si A et B sont indépendants alors, A et B^c, A^c et B, A^c et B^c sont aussi indépendants.

54

2) Théorème des probabilités composées

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n événements de Ω tels que $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \neq 0$, alors on a:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)\times P(A_2/A_1)\times P(A_3/A_1A_2)\times \dots \times P(A_n/A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

En particulier pour n=2 , on retrouve:

$P(A_1A_2)=P(A_1)\ P(A_2/A_1)$.

55

☞ Indépendance totale et deux à deux

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n événements de Ω.

- On dit que ces événements sont totalement (ou mutuellement) indépendants si pour tout entier k ($2\leq k \leq n$), on considère k événements distincts parmi les n, alors ils sont indépendants.
- On dit que ces événements sont deux à deux indépendants si, on considère 2 événements distincts parmi les n, alors ils sont indépendants.

56

Remarques :

i) Des événements qui sont mutuellement indépendants sont en particulier deux à deux indépendants mais la réciproque n'est pas vraie.

ii) D'après le théorème des probabilités composées, si les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants , alors on a:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)\times P(A_2)\times P(A_3)\times \dots \times P(A_n).$$

57

Exercice d'application: Soit une boîte contenant 20 composants électroniques dont 4 sont défectueux. On y tire au hasard et successivement 3 composants, avec remise si le composant est normal, sinon on le garde.

1) Calculer la probabilité d'avoir les trois composants défectueux.
2) Calculer la probabilité d'avoir les trois composants normaux.

58

Solution: Si on note les événements,

D^i =« avoir un cp. défectueux au $i^{ème}$ tirage ».

N^i =« avoir un cp. normal au $i^{ème}$ tirage ».

1) $P(D^1D^2D^3) = P(D^1)P(D^2/D^1)P(D^3/D^1D^2)$

$= (4/20)\times(3/19)\times(2/18)=0{,}0035$.

2) $P(N^1N^2N^3) = P(N^1)P(N^2/N^1)P(N^3/N^1N^2)$

$=P(N^1)P(N^2)P(N^3)=(16/20)\times(16/20)\times(16/20)$

$=(4/5)^3 = 0{,}512$.

59

Chapitre 2

Notion de probabilité

et généralités

1

I) Définitions et vocabulaire

On donne les définitions et le vocabulaire de bases qui seront utilisés dans les paragraphes et les chapitres suivants.

☞ Expérience (ou épreuve) aléatoire : C'est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude.
Cependant les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont connus a priori.

Exemples: - Jeter un dé à six faces.
- Tirer une boule dans un urne.

2

☞ Espace (ou ensemble) fondamental : C'est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Généralement on le note Ω (oméga).

☞ Un élément de Ω est appelé événement élémentaire (ou éventualité), on le note ω.

☞ Une partie de Ω est appelée événement.

Exemple: Pour le jet d'un dé à six faces, on a,

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

3 est un événement élémentaire.

E= {3, 6} est un événement.

3

☞ Ω est appelé événement certain.

☞ Ø est appelé événement impossible.

☞ Deux événements A et B sont dites incompatibles s'ils ne se réalisent pas simultanément c.à.d $A \cap B = \emptyset$.

Exemple: Pour le jet d'un dé à six faces, les événements A=« avoir un nombre pair » et

B=« avoir un nombre impair » sont incompatibles

Remarque: Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

4

☞ On appelle tribu d'événements sur Ω toute partie $\boldsymbol{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant :

i) $\Omega \in \boldsymbol{A}$

ii) Si $E \in \boldsymbol{A}$, alors $E^c \in \boldsymbol{A}$

iii) Si $(E_i)_{i \in N}$ est une suite dénombrable d'éléments de $\boldsymbol{A}$, alors $\bigcup_{i \in N} E_i \in \boldsymbol{A}$.

($\mathcal{A}$ est stable par les opérateurs $\cup$ et ^{c})

Remarque: Généralement, si Ω est fini on prend $\boldsymbol{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et dans ce cas, la condition iii) se réduit à,

si $E_1 \in \boldsymbol{A}$ et $E_2 \in \boldsymbol{A}$, alors $E_1 \cup E_2 \in \boldsymbol{A}$.

5

☞ Le couple $(\Omega, \boldsymbol{A})$ est appelé espace probabilisable.

☞ On appelle probabilité (ou lois de probabilité) sur l'espace probabilisable $(\Omega, \boldsymbol{A})$, toute application P de $\boldsymbol{A}$ dans [0 , 1] vérifiant:

i) $P(\Omega) = 1$ (axiome de normalisation)

ii) Pour toute suite $(E_i)_{i \in N}$ d'événements de $\boldsymbol{A}$ incompatibles deux à deux, on a:

$$P(\bigcup_{i \in N} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

(axiome complet des probabilités totales).

6

En particulier si E_1 et E_2 sont deux événements incompatibles on a:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

Où P(E) désigne la probabilité de l'événement E.

☞ Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Remarque : Pour tout $E \in \mathcal{A}$, on a toujours,

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

☞ Si Ω est fini ou infini dénombrable, on définit une lois de probabilité comme une

7

application P de Ω dans [0 , 1] vérifiant :

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

Ainsi, pour déterminer la loi de probabilité, il suffit de connaître les probabilités de tous les événements élémentaires.
Et pour tout événement $E \subset \Omega$, on a:

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega)$$

8

Exemple: Soit une expérience aléatoire qui a 7 résultats possibles dont les probabilités sont les suivantes:

Evénement élémentaire ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
$P(\omega_i)$	0,2	0,1	0,1	0,3	0,15	0,05	0,1

Pour $A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}$, on a:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = P(\omega_2) + P(\omega_4) + P(\omega_5)$$
$$= 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}55.$$

9

☞ Si Ω est fini et si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité de ces événements et que la loi de probabilité est uniforme. On montre alors que la loi de probabilité est définie par :

$$P : \Omega \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$
$$\omega \longmapsto P(\omega) = 1/\mathrm{card}(\Omega)$$

Ainsi, pour tout événement $E \subset \Omega$, on a:

$$P(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

10

Exemple: Pour le jet d'un dé équilibré, soit A=« avoir un multiple de 3 » ={3; 6}.
La loi est uniforme et on a card(Ω)=6 et card(A)=2. Donc P(A)=2/6 =1/3=0,3333.

☞ Si A est un événement d'un espace fondamental Ω tel que P(A) ≠ 0, et B un événement quelconque de Ω, la probabilité de B sachant que A est réalisé est appelée la probabilité conditionnelle de B sachant A. On la note P(B/A) et elle est définie par :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

11

Exemple: Pour le jet d'un dé équilibré, soient
A =« avoir un multiple de 3 » ={3; 6} ,
B = «avoir un six »= {6}.
C = «avoir un as »= {1}.
D = «avoir un nombre impair »= {1, 3, 5}.

i) $A \cap B$ = {6}, P(A)= 2/6 et $P(A \cap B)$=1/6, donc, P(B/A)=(1/6)/(2/6) =1/2=0,5.

ii) $A \cap C = \emptyset$ donc $P(A \cap C)$=0 d'où, P(C/A)=0/(2/6) =0.

iii) $A \cap D$ = {3}, P(D)= 3/6 et $P(A \cap D)$=1/6, donc, P(D/A)=(1/6)/(2/6) =1/2=0,5=P(D).

12

On remarque que : $P(B/A) = 0,5 > P(B) = 1/6$, $P(C/A) = 0 < P(C) = 1/6$ et $P(D/A) = P(D) = 0,5$.
On vérifie aussi que $P(A/D) = P(A) = 1/3$.
On dit que les probabilités conditionnelles de B et C dépendent de la réalisation de A, alors que la probabilité conditionnelle de D est indépendante de la réalisation de A.

13

☞ Soient A et B deux événements d'un espace fondamental Ω tels que, $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on dit que A et B sont indépendants si:

$$P(B/A) = P(B) \quad \text{ou} \quad P(A/B) = P(A).$$

Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient indépendants est donnée par:

$$P(AB) = P(A) \times P(B).$$

14

II) Propriétés d'une loi de probabilité

1) Propriétés générales

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors on a:

- ☞ $P(A^c) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$.
- ☞ Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.
- ☞ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Mais si, A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), on a: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

15

☞ Plus généralement, pour une famille de n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ on a la formule de Poincaré: (théorème des probabilités totales)

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \ldots\ldots (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots\ldots A_n).$$

16

☞ Mais, si les A_i sont incompatibles deux à deux, c.à.d. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, alors on a:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

☞ En particulier, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un système complet d'événements de Ω, c.à.d. ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) alors on a :

$$P(\Omega) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

17

- ☞ $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$ ou $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$.
- ☞ $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$ ou $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$.
- ☞ Soit C est un événements de Ω tel que $P(C) \neq 0$, alors on a:
  - $P(\bar{A}/C) = 1 - P(A/C)$.
  - $P[(A \cup B)/C] = P(A/C) + P(B/C) - P[(AB)/C]$.

Exercice: Montrer que si A et B sont indépendants alors, A et B^c, A^c et B, A^c et B^c sont aussi indépendants.

18

2) Théorème des probabilités composées

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements de Ω tels que $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \neq 0$, alors on a:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1) \times P(A_3 / A_1 A_2) \times \ldots \times P(A_n / A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

En particulier pour n=2 , on retrouve:

$P(A_1A_2)=P(A_1)\ P(A_2/A_1)$.

19

☞ Indépendance totale et deux à deux

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements de Ω.

- On dit que ces événements sont totalement (ou mutuellement) indépendants si pour tout entier k ($2 \leq k \leq n$), on considère k événements distincts parmi les n, alors ils sont indépendants.
- On dit que ces événements sont deux à deux indépendants si, on considère 2 événements distincts parmi les n, alors ils sont indépendants.

20

Remarques :

i) Des événements qui sont mutuellement indépendants sont en particulier deux à deux indépendants mais la réciproque n'est pas vraie.

ii) D'après le théorème des probabilités composées, si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants , alors on a:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \ldots \times P(A_n).$$

21

Exercice d'application: Soit une boîte contenant 20 composants électroniques dont 4 sont défectueux. On y tire au hasard et successivement 3 composants, avec remise si le composant est normal, sinon on le garde.

1) Calculer la probabilité d'avoir les trois composants défectueux.
2) Calculer la probabilité d'avoir les trois composants normaux.

22

Solution: Si on note les événements,

D^i =« avoir un cp. défectueux au $i^{ème}$ tirage ».

N^i =« avoir un cp. normal au $i^{ème}$ tirage ».

1) $P(D^1D^2D^3) = P(D^1)P(D^2/D^1)P(D^3/D^1D^2)$

$= (4/20)\times(3/19)\times(2/18)=0{,}0035$.

2) $P(N^1N^2N^3) = P(N^1)P(N^2/N^1)P(N^3/N^1N^2)$

$=P(N^1)P(N^2)P(N^3)=(16/20)\times(16/20)\times(16/20)$

$=(4/5)^3 = 0{,}512$.

23

3) Théorème de Bayes *(Probabilités des causes)*

Soient $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ une partition (ou un système complet d'événements) de Ω, et R un événement tel que $P(R)\neq 0$. Etant données :

i) Les probabilités a priori $P(E_1), P(E_2), \ldots, P(E_n)$.

ii) Les probabilités conditionnelles $P(R/E_1), P(R/E_2), \ldots, P(R/E_n)$.

Alors on a les probabilités a posteriori :

$$P(E_i / R) = \frac{P(E_i R)}{P(R)} = \frac{P(E_i)P(R/E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(R/E_j)}.$$

24

Exercice d'application: Dans une usine, 3 machines fabriquent des pièces mécaniques dans les proportions respectives suivantes: p_1=25%, p_2=35% et p_3=40%. On sait que le les taux de production de pièces défectueuses par les 3 machines sont respectivement de 10%, 5% et 1%.

On choisit au hasard une pièce dans un lot de pièces fabriquées par l'usine et on constate qu'elle est défectueuse. Quelle est probabilité qu'elle soit fabriquée par la 3ème machine?

25

Solution: Si on note les événements,

D =« la pièce est défectueuse».

M_i =« la pièce est fabriquée par la ième machine ».

On a:

i) $P(M_1)=0,25$; $P(M_2)=0,35$ et $P(M_3)=0,4$.

ii) $P(D/M_1)=0,1$; $P(D/M_2)=0,05$ et $P(D/M_3)=0,01$.

Donc par le théorème de Bayes on calcule la probabilité a posteriori $P(M_3/D)$:

$$P(M_3/D)=\frac{P(M_3)P(D/M_3)}{\sum_{j=1}^{3}P(M_j)P(D/M_j)}=\frac{0,004}{0,0465}=0,086.$$

26

4) Lois des tirages probabilistes

Assez souvent on est amené dans la pratique a effectuer des tirages probabilistes (au hasard) dans une population pour en extraire des échantillons (Sondages, Enquêtes, Contrôle, …).

Supposons qu'on a une population de N individus répartis en k catégories de tailles respectives N_1, N_2, … et N_k avec,

$$\sum_{i=1}^{k}N_i=N.$$

27

On pose $p_i=N_i/N$ la proportion des individus de la ième catégorie dans la population.

Si on choisit au hasard n individus dans la population, on cherche à calculer la probabilité d'avoir un échantillon constitué de : n_1 individus de la catégorie 1, n_2 de la catégorie 2, … et n_k de la catégorie k avec, $\sum_{i=1}^{k}n_i=n.$

Le calcul de cette probabilité, que l'on note $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$, dépend du mode de tirage et de l'ordre des individus. Ainsi on a

28

a) Tirage avec remise et avec ordre

Si on désigne par E la population des N individus, alors l'espace fondamental associé à cette expérience aléatoire est égal à l'ensemble de tous les n-échantillons ordonnés et avec répétition.

On a $\Omega_1=E^n$, $card(\Omega_1)=N^n$ et la loi de probabilité sur Ω_1 est uniforme. D'où :

$$P_1(n_1,n_2,\dots,n_k)=\frac{N_1^{n_1}\times N_2^{n_2}\times\dots\times N_k^{n_k}}{N^n}$$
$$=p_1^{n_1}\times p_2^{n_2}\times\dots\times p_k^{n_k}.$$

29

b) Tirage sans remise et avec ordre

Ω_2 = l'ensemble de tous les n-échantillons ordonnés et sans répétition.

On a, $card(\Omega_2)=A_N^n$ et la loi de probabilité sur Ω_2 est uniforme. D'où :

$$P_2(n_1,n_2,\dots,n_k)=\frac{A_{N_1}^{n_1}\times A_{N_2}^{n_2}\times\dots\times A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n}.$$

30

c) Tirage sans remise et sans ordre

Ω_3 = l'ensemble de tous les n-échantillons non ordonnés et sans répétition ou bien (les parties de E ayant n éléments).

On a, card(Ω_3)= C_N^n et la loi de probabilité sur Ω_3 est uniforme. D'où :

$$P_3(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \times C_{N_2}^{n_2} \times \dots \times C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}.$$

31

Remarques :

i) Ce tirage est équivalant au tirage des n individus simultanément.

ii) Dans le cas particulier où k=2, on a :

$$P_3(n_1, n_2) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \times C_{N_2}^{n_2}}{C_N^n}.$$

C'est la loi hypergéométrique.

32

d) Tirage avec remise et sans ordre

Ω_4 = l'ensemble de tous les n-échantillons non ordonnés et avec répétition.

On a, card(Ω_4) = K_N^n et la loi de probabilité sur Ω_4 n'est pas uniforme.

Dans ce cas on se ramène à l'utilisation de la loi de probabilité uniforme sur Ω_1 (espace associé à la même expérience 'tirage avec remise') pour calculer les probabilités des événements élémentaires de Ω_4.

33

Ainsi, à chaque n-échantillon de Ω_4 on associe tous les n-échantillons de Ω_1 qui le réalisent. Or, on a autant de ces n-échantillons que de permutations avec répétition de n individus dont n_1 de la catégorie 1, n_2 de la catégorie 2, … et n_k de la catégorie k, c.à.d

$$p_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

et chacun de ces n-échantillons de Ω_1 a une probabilité égale à $P_1(n_1, n_2, \dots, n_k)$

34

D'où :

$$P_4(n_1, n_2, \dots, n_k) = p_n(n_1, n_2, \dots, n_k) \times P_1(n_1, n_2, \dots, n_k)$$
$$= \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!} \times p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times \dots \times p_k^{n_k}.$$

C'est la loi multinomiale.

Remarque : Si k=2, on a la loi binomiale,

$$P_4(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1! \times n_2!} \times p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} = C_n^{n_1} \times p_1^{n_1} \times p_2^{n_2}$$

35

Chapitre 3

Variables aléatoires

1

I) Généralités

Introduction

Généralement l'espace fondamental associé à une expérience aléatoire est un ensemble "abstrait", sur lequel on ne peut pas effectuer des opérations et faire des comparaisons. D'où il est intéressant de pouvoir passer d'un espace fondamental quelconque à l'ensemble **R** des nombres réels. Ce passage est assuré par les variables aléatoires.

2

Définition 1:

Soit $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire sur Ω toute application X de Ω dans **R**.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega)=x.$$

On note: $D_X= X(\Omega)=\{x=X(\omega) \in \mathbf{R}: \omega \in \Omega\}$; l'ensemble de toutes les réalisations possibles de X.

☞ On dit qu'une variable aléatoire X est discrète (v.a.d.) si D_X est fini ou infini dénombrable.

3

☞ On dit qu'une variable aléatoire X est continue (v.a.c.) si D_X est infini non dénombrable (**R** ou un intervalle de **R**).

Remarque : Sur un même espace fondamental on peut définir plusieurs variables aléatoires selon les objectifs de l'expérience aléatoire.

Exemple: On lance deux fois un dé équilibré.

$\Omega=\{\omega=(i, j): 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$ $(card(\Omega)=36)$.

$X(\omega)=X(i, j)=i+j, \forall \omega \in \Omega$,

$D_X=\{n \in \mathbf{N} : 2 \leq n \leq 12\}$ $(card(D_X)=11)$.

4

☞ Pour toute partie I de D_X, on note $X^{-1}(I)$ l'événement de Ω défini par.

$X^{-1}(I)=\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ (Image réciproque de I).

Ainsi:

- Pour $I=\{x\}$ on a $X^{-1}(I)=\{\omega \in \Omega : X(\omega)=x\}$.
- Pour $I=[a,b]$ on a,

$$X^{-1}([a, b])=\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) \leq b\}.$$

Exemple: Pour l'exemple précédent.

Si, $I=\{4\}$ alors, $X^{-1}(I)=\{(1, 3); (3, 1); (2, 2)\}$.

5

Définition 2:

Soient $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire sur Ω et $\boldsymbol{A}_X$ une tribu de parties de D_X. On appelle loi de probabilité de X, l'application P_X définie par:

$$P_X : \boldsymbol{A}_X \longrightarrow [0 , 1]$$
$$I \longmapsto P_X(I)=P[X^{-1}(I)].$$

On montre que P_X est une loi de probabilité sur D_X. Ainsi on a un espace probabilisé $(D_X, \boldsymbol{A}_X, P_X)$.

En particulier, pour $x \in D_X$ on a:

$$P_X(x) =P[X^{-1}(x)]. = P\{\omega \in \Omega: X(\omega)=x\}.$$

6

II) Variables aléatoires discrètes

1) Loi de probabilité d'une v.a.d.

Soient (Ω, ***A***, P) un espace probabilisé et X une v.a.d. sur Ω.

La loi de probabilité de X est définie comme une application de D_X dans [0, 1] par:

$$P_X : D_X \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$x \longmapsto P_X(x) = P[\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x\}] = P[X^{-1}(x)].$$

7

On peut présenter la loi de probabilité d'une v.a.d. X comme un ensemble de couples, $\{(x_i,p_i) : x_i \in D_X\}$, où $p_i = P(x_i)$ et tels que :

$$\sum_{x_i\in D_X} p_i = 1.$$

Si D_X est fini (card D_X =n), on peut présenter la loi de probabilité de X par un tableau:

$x_i \in D_X$	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$p_i = P(x_i)$	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

8

Exemple: On lance deux fois un dé équilibré.

$\Omega=\{\omega=(i, j): 1 \le i\le 6$ et $1 \le j\le 6\}$ (card(Ω)=36).

$$X(\omega)=\mathrm{Sup}(i, j)= \begin{cases} i & si \quad i \ge j \\ j & si \quad j \ge i \end{cases}, \ \forall\omega\in\Omega.$$

$D_X =\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, (card($D_X$)=6).

La loi de probabilité de X est donnée par :

$x_i \in D_X$	1	2	3	4	5	6
$p_i = P(x_i)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

9

2) Fonction de répartition d'une v.a.d.

Définition:

Soit X une v.a.d. sur Ω. On appelle fonction de répartition de X l' application, F_X (ou F) de **R** dans [0, 1], définie par:

$$F_X : \mathbf{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto F_X(x) = P[X<x] = \sum_{\substack{x_i\in D_X : \\ x_i<x}} P(X=x_i).$$

10

Propriétés :

La fonction de répartition F d'une v.a. X vérifie les propriétés suivantes :

i) Par définition on a , $0\le F(x) \le 1$, $\forall x \in\mathbf{R}$.

ii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$

iii) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$

iv) F est croissante, c.à.d., si $x \le y$ alors $F(x) \le F(y)$.

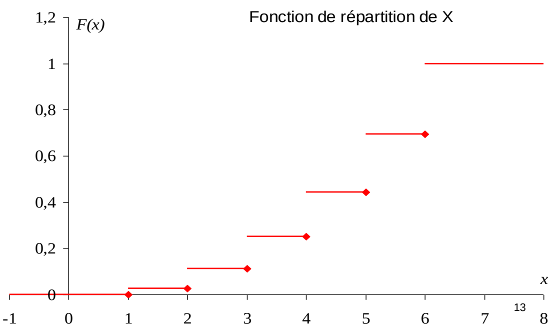
11

Exemple: On détermine la fonction de répartition de la v.a.d. X(ω)=Sup(i,j) (l'exemple précédent) et on trace sa représentation graphique. $\forall x \in \mathbf{R}$, on a:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x\le 1 \\ P(1)=1/36 & si \quad 1<x\le 2 \\ P(1)+P(2)=4/36 & si\ 2<x\le 3 \\ P(1)+P(2)+P(3)=9/36 & si\ 3<x\le 4 \\ P(1)+\ldots+P(4)=16/36 & si\ 4<x\le 5 \\ P(1)+\ldots+P(5)=25/36 & si\ 5<x\le 6 \\ P(1)+\ldots+P(6)=1 & si\ 6<x. \end{cases}$$

12

$x \in \mathbf{R}$	$]-\infty,1]$	$]1,2]$	$]2,3]$	$]3,4]$	$]4,5]$	$]5,6]$	$]6,+\infty[$
F(x)	0	1/36	4/36	9/36	16/36	25/36	1



13

3) Caractéristiques d'une v.a.d.

a) Espérance mathématique :

Si X est une v.a.d. de loi de probabilité, $\{(x_i, p_i) : x_i \in D_X\}$, alors l'espérance mathématique de X, que l'on note E(X), est le nombre réel donné par :

$$E(X) = \sum_{x_i \in D_X} x_i \times P(X = x_i) = \sum_{x_i \in D_X} p_i \times x_i.$$

14

Propriétés :

i) On a toujours: $inf(x_i) \leq E(X) \leq sup(x_i)$

ii) Soient X et Y deux v.a., a et b deux nombres réels, alors on a:

E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)

iii) Si f est une fonction de D_X dans **R**, alors,

$$E[f(X)] = \sum_{x_i \in D_X} f(x_i) \times P(X = x_i).$$

15

b) Variance et écart-type :

Si X est une v.a.d. de loi de probabilité, $\{(x_i, p_i) : x_i \in D_X\}$ et d'espérance E(X), alors la variance de X que l'on note V(X) est le nombre réel positif donné par :

$$V(X) = \sum_{x_i \in D_X} p_i \times (x_i - E(X))^2.$$

Et l'écart-type de X que l'on note σ_X (ou σ) est donné par:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

16

Propriétés :

i) On montre que V(X) s'écrit :

$$V(X) = [\sum_{x_i \in D_X} p_i \times x_i^2] - [E(X)]^2$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2.$$

ii) V(X)=0 si et seulement si, $x_i = E(X)\ \forall\ x_i \in D_X$,

c.à.d. la variable aléatoire X est constante.

iii) Si a et b sont 2 nombres réels, alors on a:

$V(aX+b)=a^2V(X)$ et $\sigma_{(aX+b)} = |a|\ \sigma_X$

17

Exemple: On calcule l'espérance et l'écart type de la v.a.d. X(ω)=Sup(i,j) (l'exemple précédent).

$$E(X) = \sum_{x_i=1}^{6} p_i \times x_i = 4{,}472.$$

$$V(X) = [\sum_{x_i=1}^{6} p_i \times x_i^2] - [E(X)]^2$$

$$= 21{,}972 - (4{,}472)^2 = 1{,}97.$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}97} = 1{,}403.$$

18

Définition:

Une v.a. X est dite centrée si E(X)=0 et elle est réduite si V(X)=1(ou σ_X =1).

Pour toute v.a. X d'espérance E(X)≠0 et d'écart type σ_X ≠1, on définit la v.a. Y centrée et réduite correspondante par :

$$Y=(X-E(X))/\sigma_X.$$

19

d) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (I.B.T)

Théorème: Soit X une v.a. d'espérance E(X) et d'écart type σ_X ≠0, alors pour tout réel ε>0, on a:

$$P\left(\frac{|X-E(X)|}{\sigma}\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Ou bien,

$$P\left(|X-E(X)|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

20

Interprétation :

i) L'I.B.T permet de calculer un majorant de la probabilité pour que l'écart absolu entre la v.a. X et son espérance soit supérieur à $\sigma\times\varepsilon$.

$$P\left(\frac{|X-E(X)|}{\sigma}\geq\varepsilon\right)=P\left(|X-E(X)|\geq\sigma\varepsilon\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

ii) L'I.B.T permet de calculer un minorant de la probabilité pour que l'écart absolu entre la v.a. X et son espérance soit inférieur à $\sigma\times\varepsilon$.

$$P\left(\frac{|X-E(X)|}{\sigma}<\varepsilon\right)=P\left(|X-E(X)|<\sigma\varepsilon\right)\geq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

21

iii) L'I.B.T montre que pour les v.a. on ne peut pas avoir simultanément une grande précision sur les valeurs avec une grande certitude (ou probabilité), c.à.d. si on cherche à augmenter la précision on diminue la certitude et inversement.

Exemple:

Pour l'exemple précédent, on a E(X)=4,472 et σ=1,403 (σ^2=1,97).

22

i) Si on prend ε=1,5, on a:

$$P\left(|X-4,472|\geq 1,5\right)\leq\frac{1,97}{(1,5)^2}=0,875 \text{ et}$$

$$P\left(|X-4,472|<1,5\right)\geq 1-0,875=0,125.$$

On a remarque que:

$$P\left(|X-4,472|\geq 1,5\right)=0,4167$$

et

$$P\left(|X-4,472|<1,5\right)=0,5833.$$

23

ii) Si on prend ε=2, on a :

$$P\left(|X-4,472|\geq 2\right)\leq\frac{1,97}{2^2}=0,493 \text{ et}$$

$$P\left(|X-4,472|<2\right)\geq 1-0,493=0,507.$$

On a remarque que :

$$P\left(|X-4,472|\geq 2\right)=0,1111$$

et

$$P\left(|X-4,472|<2\right)=0,8889.$$

24

4) Couple de variables aléatoires

Soient X et Y deux v.a.d. sur un même espace fondamental Ω, le couple aléatoire (X,Y) est une application de Ω dans $\mathbf{R}^2$.

$$(X,Y) : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^2$$
$$\omega \longmapsto (X(\omega),Y(\omega))=(x,y)$$

On note:
$D_{XY}=\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in D_X \text{ et } y \in D_Y\} = D_X \times D_Y$; l'ensemble de toutes les réalisations possibles du couple alétoire (X,Y). Où D_X et D_Y sont les domaines respectifs de X et de Y.

25

a) Loi conjointe :

La loi de probabilité du couple aléatoire (X,Y) est appelée loi conjointe de X et de Y. Cette loi est définie de D_{XY} dans [0, 1] par:

Pour tout $(x,y) \in D_{XY}$,

$$P(x,y)=P(X=x \text{ et } Y=y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$$

Avec,

$$\sum_{x \in D_X} \sum_{y \in D_Y} P(x,y) = 1.$$

26

Remarque :

Si D_X et D_Y sont finis et de cardinaux respectifs m et n, alors on peut donner la loi conjointe:

- soit par un ensemble de m×n triplés (x_i, y_j, p_{ij}) tels que:

$$x_i \in D_X,\ y_j \in D_Y,\ p_{ij} = P(x_i, y_j) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

- soit par un tableau de contingence

27

$x_i \in D_X$ \ $y_j \in D_Y$	y_1	…	y_j	…	y_n
x_1	p_{11}	…	p_{1j}	…	p_{1n}
:	:	:	:		:
x_i	p_{i1}	…	p_{ij}	…	p_{in}
:	:	:	:		:
x_m	p_{m1}	…	p_{mj}	…	p_{mn}

28

Exercice: Dans une urne il y a des boules de même couleur dont ¾ portent le numéro 1 et ¼ portent le numéro 0. On tire 2 boules avec remise et on pose:

X= "le produit des 2 numéros obtenus"

Y="la somme des 2 numéros obtenus"

Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).

Solution: On a d'abord,

$D_X=\{0, 1\}$ et $D_Y=\{0, 1, 2\}$

29

$D_{XY}=\{(0,0); (0,1); (0,2); (1,0); (1,1); (1,2)\}$

$Card(D_{XY})=2\times 3=6$

$P(0,0)=P(X=0 \text{ et } Y=0)=1/16$.

$P(0,1)=P(X=0 \text{ et } Y=1)=6/16$.

$P(0,2)=P(X=0 \text{ et } Y=2)=0$ (impossible).

$P(1,0)=P(X=1 \text{ et } Y=0)=0$ (impossible).

$P(1,1)=P(X=1 \text{ et } Y=1)=0$ (impossible).

$P(1,2)=P(X=1 \text{ et } Y=2)=9/16$.

30

Tableau de contingence

$x_i \in D_X$ \ $y_j \in D_Y$	0	1	2	Loi marginale de X
0	1/16	6/16	0	7/16
1	0	0	9/16	9/16
Loi marginale de Y	1/16	6/16	9/16	1

31

b) Lois marginales :

La loi marginale est la loi de probabilité de chacune des deux variables. Ainsi pour un couple aléatoire (X,Y), on détermine les deux lois marginales à partir de la loi conjointe par:

- Pour tout $x \in D_X$, $P(X=x) = \sum_{y \in D_Y} P(x,y).$
- Pour tout $y \in D_Y$, $P(Y=y) = \sum_{x \in D_X} P(x,y).$

32

c) Lois conditionnelles :

Lorsqu'on fixe une valeur d'une variable du couple aléatoire (X,Y), on détermine une loi conditionnelle de l'autre variable. Ainsi on a:

- Si on fixe $y \in D_Y$, alors pour tout $x \in D_X$,

$$P(X=x/Y=y) = \frac{P(x,y)}{P(Y=y)}.$$

- Si on fixe $x \in D_X$, alors pour tout $y \in D_Y$,

$$P(Y=y/X=x) = \frac{P(x,y)}{P(X=x)}.$$

33

Exemple: Dans l'exemple précédent,

- si on fixe y =1, alors la loi conditionnelle de X sachant que Y=1, est donnée par:

P(X=0/Y=1)=1 et P(X=1/Y=1)=0.

- si on fixe x =0, alors la loi conditionnelle de Y sachant que X=0, est donnée par:

P(Y=0/X=0)=1/7 ; P(Y=1/X=0)=6/7

et P(Y=2/X=0)=0.

34

d) Indépendance entre deux variables :

Deux variables X et Y sont indépendantes si, pour tout $x \in D_X$ et tout $y \in D_Y$ on a:

P(X=x/Y=y)=P(X=x) ou P(Y=y/X=x)=P(Y=y).

Ce qui est équivalent à:

P(X=x, Y=y) = P(X=x)×P(Y=y).

Remarque: Pour montrer que X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un seul couple (x,y) tel que:

P(X=x, Y=y) ≠ P(X=x)×P(Y=y).

35

5) Caractéristiques d'un couple aléatoire

a) Caractéristiques marginales :

Ce sont l'espérance et la variance marginales de chacune des deux variables, calculées à partir de la loi marginale correspondante. Ainsi on a:

$$E(X) = \sum_{x \in D_X} xP(X=x) = \sum_{x \in D_X} \sum_{y \in D_Y} xP(x,y).$$

$$V(X) = \sum_{x \in D_X} [x - E(X)]^2 P(X=x)$$

$$= \sum_{x \in D_X} \sum_{y \in D_Y} [x - E(X)]^2 P(x,y).$$

36

b) Caractéristiques conditionnelles :

Ce sont les espérances et les variances conditionnelles de chacune des deux variables, calculées à partir des lois conditionnelles correspondantes. Ainsi on :

$$E(X/Y=y)=\sum_{x\in D_X} xP(X=x/Y=y)=\sum_{x\in D_X} x\frac{P(x,y)}{P(Y=y)}.$$

$$V(X/Y=y)=\sum_{x\in D_X}[x-E(X/Y=y)]^2P(X=x/Y=y)$$

$$=\sum_{x\in D_X}[x-E(X/Y=y)]^2\frac{P(x,y)}{P(Y=y)}.$$

37

Remarque: Si card(D_X)=m et card(D_Y)=n, alors on a n moyennes et n variances conditionnelles de X, ainsi que m moyennes et m variances conditionnelles de Y.

c) Relations entre caractéristiques marginales conditionnelles

On montre que :

$$E(X)=\sum_{y\in D_Y}P(Y=y)E(X/Y=y)$$

$$E(Y)=\sum_{x\in D_X}P(X=x)E(Y/X=x).$$

38

$$V(X)=\sum_{y\in D_Y}P(Y=y)V(X/Y=y)$$

$$+\sum_{y\in D_Y}P(Y=y)[E(X/Y=y)-E(X)]^2.$$

$$V(Y)=\sum_{x\in D_X}P(X=x)V(Y/X=x)$$

$$+\sum_{x\in D_X}P(X=x)[E(Y/X=x)-E(Y)]^2.$$

On dit que la variance marginale est égale à la somme de l'espérance des variances conditionnelles et la variance des espérances conditionnelles

39

Exemple: D'après l'exemple précédent on a,

$$E(X)=0\times\frac{7}{16}+1\times\frac{9}{16}=\frac{9}{16}.$$

$$E(X/Y=0)=0\times\frac{1/16}{1/16}+1\times 0=0.$$

$$E(X/Y=1)=0\times\frac{6/16}{6/16}+1\times 0=0.$$

$$E(X/Y=2)=0\times 0+1\times\frac{9/16}{9/16}=1.$$

$$E(X)=\frac{1}{16}\times 0+\frac{6}{16}\times 0+\frac{9}{16}\times 1=\frac{9}{16}.$$

40

$$V(X)=\sum_{x\in D_X}x^2P(X=x)-[E(X)]^2$$

$$=9/16-(9/16)^2=\frac{63}{16^2}=0,2461$$

$$V(X/Y=0)=0.\qquad V(X/Y=1)=0.$$

$$V(X/Y=2)=0.$$

$$V(X)=0+\left\{\frac{1}{16}\times[E(X)]^2+\frac{6}{16}\times[E(X)]^2\right.$$

$$\left.+\frac{9}{16}\times[1-E(X)]^2\right\}=\frac{63}{16^2}=0,2461.$$

41

d) Espérance d'une fonction de (X,Y)

Soit f une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, l'espérance de la v.a f(X,Y) est donnée par:

$$E[f(X,Y)]=\sum_{x\in D_X}\sum_{y\in D_Y}f(x,y)P(x,y).$$

e) Covariance

Définition :

La covariance entre deux v.a.d X et Y est le nombre réel donné par:

$$Cov(X,Y)=\sum_{x\in D_X}\sum_{y\in D_Y}[x-E(X)]\times[y-E(Y)]P(x,y).$$

42

Propriétés :

i) La covariance entre X et Y se calcule par :

$$Cov(X,Y) = [\sum_{x \in D_X} \sum_{y \in D_Y} xyP(x,y)] - [E(X)E(Y)]$$
$$= [E(XY)] - [E(X)E(Y)].$$

ii) Soient a, b, c et d 4 nombres réels, alors on a: $Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y).$

iii) Si X et Y sont indépendantes on a:

E(XY)=E(X)E(Y), donc Cov(X,Y)=0

43

Remarque: Il se peut que Cov(X,Y)=0, sans que X et Y soient indépendantes, car Cov(X,Y)=0 est une condition nécessaire pour l'indépendance mais elle n'est pas suffisante.

f) Variance de la somme de deux v.a.

Soient X et Y deux v.a., alors pour a et b deux nombres réels, on a:

$V(aX+bY) = a^2V(X)+b^2V(Y)+2abCov(X,Y).$

En particulier on a:

$V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y).$

$V(X-Y) = V(X)+V(Y)-2Cov(X,Y).$

44

Remarque: Si X et Y sont indépendantes, alors Cov(X,Y)=0 et par conséquent on a:

$V(X+Y) = V(X-Y) = V(X)+V(Y).$

Exemple: on calcule la covariance de X et Y dans l'exemple précédent.

$$Cov(X,Y) = [\sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{2} xyP(x,y)] - [E(X)E(Y)]$$
$$= [1 \times 2 \times \frac{9}{16}] - [\frac{9}{16} \times \frac{3}{2}] = \frac{9}{32}.$$

45

c) Moments d'une v.a.d. :

Soient X une v.a.d. de loi de probabilité, $\{(x_i, p_i) : x_i \in D_X\}$ et r un entier>0, on distingue deux types de moments de X :

i) Les moments (ou moments non centrés) d'ordre r, notés $m_r(X)$ et donnés par :

$$m_r(X) = E[X^r] = \sum_{x_i \in D_X} x_i^r \times p_i.$$

ii) Les moments centrés d'ordre r, notés $\mu_r(X)$ et donnés par :

$$\mu_r(X) = E[(X - E(X))^r] = \sum_{x_i \in D_X} (x_i - E(X))^r \times p_i.$$

46

Remarques: On a,

i) $E(X) = m_1(X)$.

ii) $V(X) = \mu_2(X) = m_2(X) - [m_1(X)]^2$.

47

Chapitre 4

Lois de probabilités discrètes usuelles

Introduction

Assez souvent on rencontre dans la pratique des expériences aléatoires qui ont deux résultats possibles (oui ou non; défectueux ou normal; …). Ces expériences peuvent être répétées un certain nombre de fois, indépendantes ou dépendantes entre elles

On considère aussi des expériences aléatoires relatives aux événements rares.

L'étude de ces expériences se fait par, la définition des variables aléatoires correspondantes et la détermination de leurs lois de probabilités et leurs propriétés.

1) Loi uniforme

Soit X une v.a.d qui a n valeurs possibles c.à.d. $D_X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, on dit que la loi de probabilité de X est uniforme si,

Pour tout $x_i \in D_X$, on a: $P(x_i)=1/n$.

2) Loi de Bernoulli

Soit A un événement de probabilité p=P(A) connue, on définit la variable aléatoire X associée à la réalisation ou non de A, par:

$X=1$ *si A est réalisé (succès) et*

$X=0$ *sinon (échec)*

On a donc : $D_X=\{0, 1\}$, P(X=1)=P(A)=p et P(X=0)=1-p=q.

On dit alors que la v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, et on note X~ B(p).

On montre que: E(X) =p et V(X)=p(1-p)=pq.

Exemple: Un lot de pièces mécaniques contient 5% de pièces défectueuses. On tire au hasard une pièce dans ce lot et on définit la v.a.d. X par:

$$X=\begin{cases}0 & \text{si la pièce est défectueuse}\\ 1 & \text{si la pièce est normale}\end{cases}.$$

p=P(avoir une pièce normale)=0,95 et q=0,05.

On a donc, X~ B(0,95).

E(X)=p=0,95 et VX)=0,95×0,05=0,0475.

$$\sigma_X=\sqrt{0{,}0475}\approx 0{,}218.$$

Utilisation de la loi de Bernoulli

On utilise la loi de Bernoulli pour les v.a associées à des expériences aléatoires qui n'ont que deux issus:

Succès avec une probabilité p.

Échec avec une probabilité 1-p=q.

Ces expériences sont dites de Bernoulli ou bernoulliennes .

3) Loi binomiale

Soit A un événement de probabilité p=P(A) connue et n un entier≠0.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer n expériences aléatoires indépendantes de Bernoulli associées à l'événement A.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de réalisations de A, au cours des n expériences.

X est une v.a.d. telle que:

$D_X=\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ et pour tout $k \in D_X$ on a,

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

On dit alors que la v.a. X suit une loi Binomiale de paramètres n et p, et on note X~ B(n, p).

Remarques:

i) Si n=1 on retrouve B(1, p)= B(p).

ii) Si on définit n v.a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de Bernoulli indépendantes par:

$$X_i=\begin{cases}1 & si\ A\ est\ réalisé\ à\ l'expérience\ i\\ 0 & sinon\end{cases}.$$

alors on vérifie que la v.a. X s'écrit comme une somme des X_i:

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n=\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Où, pour tout i, X_i~ B(p).

Propriétés:

1) D'après le résultats ii) de la remarque précédente, on montre que:

E(X) =np et V(X)=np(1-p)=npq.

2) Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement B(n,p) et B(m,p), alors la variable aléatoire Z=X+Y suit aussi une loi binomiale B(n+m,p).

Exercice: Un lot de pièces mécaniques contient 5% de pièces défectueuses. On tire au hasard 7 pièces avec remise dans ce lot.

Calculer la probabilité d'avoir 2 pièces défectueuses parmi les 7 pièces tirées.

Solution: Soit A l'événement "avoir une pièce défectueuse lors d'un tirage", d'où, P(A)=p=0,05.

Tirer 7 pièces avec remise revient à effectuer 7 expériences de Bernoulli indépendantes.

Soit X la v.a. associée au nombre de pièces défectueuses parmi les 7 pièces tirées. D'où, X~ B(7; 0,05).

Donc, $D_X=\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$ et pour tout $k \in D_X$ on a, $P(X=k)=C_7^k 0{,}05^k 0{,}95^{7-k}$.

On calcule alors:

$$P(X=2)=C_7^2 0{,}05^2 0{,}95^5 \approx 0{,}041$$

Utilisation de la loi binomiale

On utilise cette loi dans la pratique pour calculer la probabilité d'avoir k succès dans n expériences de Bernoulli répétées indépendamment les une des autres, quand la probabilité de succès p est connue.

La probabilité d'échec est donc q=1-p.

4) Loi hypergéométrique

Soit une population de taille N, que l'on partage en deux catégories selon que les individus possèdent (ou vérifient) une certaine propriété A ou non.

Si on pose,

N_1=nombre d'individus ayant A.

N_2=nombre d'individus n'ayant pas A.

On a $N=N_1+N_2$

Si on tire au hasard un individu de la population, on a:

P(avoir un individu ayant A)=N_1/N=p

Soit n un entier ($0<n\leq N$). On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard et sans remise n individus parmi les N.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre d'individus ayant A, parmi les n tirés. Alors :

$$D_X=\{ k \in \mathbf{N}:\ sup(0;\ n-N_2) \leq k \leq inf(n;\ N_1)\}$$

et pour tout $k \in D_X$ on a,

$$P(X=k)=\frac{C_{N_1}^k \times C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}.$$

On dit alors que la v.a. X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n et p.

On note $X \sim H(N;\, n;\, p)$.

On montre que:

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq \times \frac{N-n}{N-1}.$$

Remarques:

i) On peut écrire X comme une somme de n v.a. de Bernoulli de paramètre p et dépendantes

ii) si X~ B(n; p) et Y~ H(N; n; p) on a:

E(X)=E(Y), mais,

V(Y) ≤ V(X), car le rapport (N-n)/(N-1) ≤1.

Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

On montre que lorsque N tend vers l'infini, la loi hypergéométrique H(N; n; p) converge vers la loi binomiale B(n; p).

$$\lim_{N \to +\infty} H(N;\, n;\, p) = B(n;\, p).$$

Dans la pratique on utilise l'approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale dès que le taux de sondage n/N est inférieur à 0,1 (ou 10%). C'est-à-dire,

si n/N ≤ 0,1 on a H(N; n; p) ≈ B(n; p).

Exercice: On sait que 4% d'une population de 1000 personnes ont une maladie M. On choisit au hasard et sans remise un échantillon de 10 personnes dans cette population.

Calculer la probabilité d'avoir une seule personne malade dans l'échantillon.

Solution:

On a, N=1000 et p=0,04, donc N_1=pN=40 et N_2=N-N_1=960.

Soit X la v.a. associée au nombre de personnes malades parmi les 10 choisies. D'où, X~ H(1000; 10; 0,04).

Donc,

D_X={k∈**N**: sup(0; 10-960) ≤ k ≤ inf(10; 40)}

D_X={k∈**N**: 0 ≤ k ≤ 10}

et pour tout k∈D_X on a,

$$P(X=k) = \frac{C_{40}^{k} \times C_{960}^{10-k}}{C_{1000}^{10}}.$$

i) Avec la loi exacte de X on a:

$$P(X=1) = \frac{C_{40}^{1} \times C_{960}^{9}}{C_{1000}^{10}} \approx 0{,}2791.$$

ii) Le taux de sondage 10/1000=0,01<0,1, donc on peut utiliser l'approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale .

H(1000; 10; 0,04) ≈ B(10; 0,04).

D'où, on calcule une valeur approchée de P(x=1), par:

$$P(X=1) = C_{10}^{1} 0{,}04^{1} 0{,}96^{9} \approx 0{,}2770$$

Remarque:

Plus le taux de sondage n/N est faible plus l'approximation est meilleure.

5) Loi de Poisson

Soit un nombre réel λ>0, on dit qu'une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et on note X~ ***P***(λ), si:

D_X=**N** (ensemble des entiers naturels) et pour tout k∈**N**, on a,

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{k}}{k!}.$$

*En statistique , la **loi de Poisson** de paramètre λ , ou **loi des événements rares**, correspond au modèle suivant: Sur une période T, un événement arrive en moyenne λ fois. On appelle X la v.a déterminant le nombre de fois où l'événement se produit dans la période T. X prend des valeurs entières : 0, 1, 2, ...*

On montre que:

$E(X)=V(X)= \lambda$, donc $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$.

Remarque:

Le paramètre λ peut s'interpréter comme le nombre (ou le taux) moyen d'observer un certain événement de probabilité très faible (événement rare).

Propriétés:

i) Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n v.a mutuellement indépendantes, telles que pour tout i, $X_i \sim \boldsymbol{P}(\lambda_i)$

Alors la v.a $Y= X_1+ X_2+ \ldots+ X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1+ \lambda_2+ \ldots+ \lambda_n$.

ii) Soient *X* une *v.a.d.* qui suit une loi de Poisson de paramètre λ et *Y* une *v.a.d.* dont la loi conditionnelle est binomiale, c.à.d.,

$(Y / X = n) \sim B(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$.

Alors la loi de Y (loi marginale) est une loi de Poisson de paramètre λp.

Utilisation de la loi de Poisson

Dans la pratique on utilise la loi de Poisson pour étudier le nombre d'apparitions d'un événement rare pendant une période donnée (l'arrivée d'un client à un guichet, panne d'une machine, appel téléphonique, …). Pour cela on fait les hypothèses suivantes:

i) Il existe un réel $\lambda>0$, tel que au cours d'un intervalle de temps Δt suffisamment petit, la probabilité d'avoir l'événement une seule fois est approximativement égale à $\lambda\Delta t$.

ii) La probabilité d'avoir au moins deux événements au cours de Δt est presque nulle.

iii) Si on considère des intervalles de temps différents, alors le nombre de réalisations dans un intervalle est indépendant des nombres de réalisations dans les autres intervalles.

Sous ces hypothèses on montre que la v.a.d. X associée au nombre de réalisations de l'événement dans l'intervalle de temps [0, t], suit une loi de Poisson de paramètre λt.

D'où, $E(X)= \lambda t$ est le nombre moyen de réalisations de l'événement pendant le temps t.

Ainsi, si on prend t=1, on a, $E(X)= \lambda$ est le nombre moyen de réalisations de l'événement par unité de temps.

Exercice: Le nombre de pannes d'une machine sur une période donnée suit une loi de Poisson. Sachant qu'en moyenne la machine fait 2 pannes par trimestre.

1) Calculer la probabilité de n'avoir aucune panne à un mois donné.

2) Calculer la probabilité d'avoir 4 pannes pendant une année.

Solution: Si l'unité de temps est le trimestre.

Soient les v.a. X, Y et Z associées respectivement au nombre de pannes de la machine pendant, un trimestre, un mois et une année. Donc,

$X\sim \boldsymbol{P}(2)$; $Y\sim \boldsymbol{P}(2/3)$ et $Z\sim \boldsymbol{P}(2\times 4)= \boldsymbol{P}(8)$.

1) $$P(Y=0) = \frac{e^{-(2/3)} \times (2/3)^0}{0!} = e^{-(2/3)} = 0{,}513.$$

2) $$P(Z=4) = \frac{e^{-8} \times 8^4}{4!} \approx 0{,}0573.$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On montre que lorsque n tend vers l'infini, p tend vers 0 et np tend vers $\lambda>0$, alors la loi binomiale B(n; p) converge vers la loi de Poisson $\boldsymbol{P}(\lambda)$.

$$Si \lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} np=\lambda \; alors \lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} B(n;p)=\boldsymbol{P}(\lambda).$$

Dans la pratique on utilise l'approximation d'une loi binomiale par une loi Poisson quand n est grand ($n\geq 50$) et p est petit ($p\leq 0,1$). Ainsi,

si $n\geq 50$ et $p\leq 0,1$; on a, $B(n; p) \approx \boldsymbol{P}(np)$.

Exercice: A l'entrée d'une station de train un marchand de journaux remarque qu'entre 8h et 9h en moyenne, une personne sur 10 achète un journal.

Sachant qu'ils passent 120 personnes entre 8h et 9h, et soit *X* la v.a. définie par :

X = « nombre de journaux vendus pendant cette période ».

1) Indiquer la loi de probabilité exacte de *X*.

2) Par quelle loi peut-on approcher la loi de *X*
3) Calculer *P(X = 15)* par la loi exacte puis par la loi approximative.

Solution:

1) Les personnes achètent les journaux indépendamment les unes des autres. Donc d'après la définition de X on a:

$X \sim B(120;\, 0,1)$.

2) On a $n=120\geq 50$ et $p=0,1\leq 0,1$; donc on peut utiliser l'approximation d'une loi binomiale par une loi Poisson:

$B(120;\, 0,1) \approx \boldsymbol{P}(120\times 0,1) = \boldsymbol{P}(12)$.

3) Par la loi exacte on a:

$$P(X=15)=C_{120}^{15}(0,1)^{15}(0,9)^{105}\approx 0,0742$$

Par la loi approximative on a:

$$P(X=15)\approx \frac{e^{-12}\times 12^{15}}{15!}\approx 0,07239.$$

Remarques:

i) Plus n est grand et p est petit plus l'approximation est meilleure.

ii) Si on a $n\geq 50$ et $p\geq 0,9$; alors $q=1-p\leq 0,1$. Donc, on considère la v.a. $Y=n-X \sim B(n;q)$.

On applique l'approximation à Y:

$B(n; q) \approx \boldsymbol{P}(nq)$

$P(X=k)=P(n-Y=k)=P(Y=n-k)\approx e^{-nq}(nq)^{n-k}/(n-k)!$

6) Loi binomiale négative (ou de Pascal)

Soit A un événement de probabilité $p=P(A)$ connue et m un entier$\neq 0$.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des expériences aléatoires indépendantes de Bernoulli associées à A, jusqu'à avoir m fois l'événement A.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre d'expériences nécessaires pour avoir m fois l'événement A.

X est une v.a.d. telle que:

$D_X=\{k\in\boldsymbol{N} : k\geq m\}$ et pour tout $k\in D_X$ on a,

$$P(X=k)=C_{k-1}^{m-1}p^m q^{k-m}.$$

On dit alors que la v.a. X suit une loi Binomiale négative ou de Pascal de paramètres m et p, et on note $X\sim G(m, p)$.

On montre que :

$$E(X)=\frac{m}{p} \quad et \quad V(X)=\frac{mq}{p^2},$$

$$donc \;\; \sigma_X=\frac{\sqrt{mq}}{p}.$$

Cas particulier (la loi géomètrique)

Si on prend m=1, alors:

X= "nombre d'expériences nécessaires pour avoir l'événement A pour la 1ère fois"

$D_X=\{k\in \boldsymbol{N} : k\geq 1\} = \boldsymbol{N}^*$ et pour tout $k\in D_X$ on a,

$$P(X=k)=pq^{k-1}.$$

On dit alors que. X suit une loi géométrique de paramètres p, et on note X~ G(1, p)=G(p).

On vérifie que :

$$E(X)=\frac{1}{p};\quad V(X)=\frac{q}{p^2}\quad et\quad \sigma_X=\frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Exercice: Une urne contient une proportion $p = 3/5$ de boules blanches et une proportion $q=1-p$ de boules noires.

On considère un tirage avec remise et on pose X : « le nombre de tirages nécessaires pour avoir une boule blanche » et Y : « le nombre de tirages nécessaires pour avoir 3 boules blanches ».

1) Quelle est la loi de X ? Calculer P(X=2).

2) Quelle est la loi de Y ? Calculer P(Y=5).

Solution: On a p=3/5=0,6 et q=0,4.

Le tirage étant avec remise, donc les tirages successifs sont indépendants.

D'où, d'après les définitions de X et Y on a:

1) X~ G(0,6). $D_X=\boldsymbol{N}^*$ et pour tout $k\in D_X$,

$$P(X=k)=0,6\times(0,4)^{k-1}$$

Donc, $P(X=2)=0,6\times(0,4)^1=0,24.$

2) Y~ G(3; 0,6), (m=3),

$D_Y=\{k\in \boldsymbol{N} : k\geq 3\}$ et pour tout $k\in D_Y$,

$$P(Y=k)=C_{k-1}^{2}(0,6)^3(0,4)^{k-3}.$$

Donc,

$$P(Y=5)=C_4^2(0,6)^3(0,4)^2\approx 0,2074.$$

Chapitre 5

Lois de probabilités continues

et lois usuelles

Introduction

On rencontre dans la pratique des phénomènes aléatoires dont les variables aléatoires associées peuvent prendre toute valeur de **R** ou d'un intervalle de **R**. (Revenus, Tailles, poids, …).

Donc les ensembles des valeurs possibles de telles v.a. sont infinis et non dénombrables, et ces variables sont dites variables aléatoires continues (v.a.c.).

Contrairement aux v.a.d., les lois des v.a.c. ne sont pas caractérisées par les probabilités discrètes des réalisations $P(X=x_i)$, mais elles sont définies par la donnée d'une fonction continue f, appelée densité de probabilité de la v.a.c.

Soit X une v.a.c., par la suite on note D_X l'ensemble des valeurs possibles de X. D_X peut être **R** tout entier, un intervalle de **R** ([a, b];]a, b];…) ou la réunion de quelques intervalles de **R**.

I) Densité de probabilité et fonction de répartition d'une v.a.c.

1) Densité de probabilité

Définition: Soit X une v.a.c., on appelle densité de probabilité (ou densité) de X, une fonction f, de **R** dans **R**, telle que:

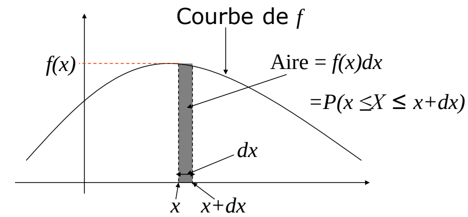
☞ f est positive ou nulle. $\begin{cases} f(x) \geq 0 & si\ x \in D_X \\ 0 & sinon \end{cases}.$

☞ f est continue sauf en un nombre fini de points.

☞ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

(Se lit somme ou intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ de f).

Interprétation:

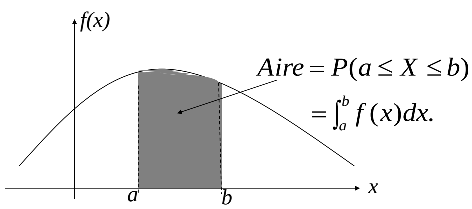


Ainsi on a:

i) Pour tout $x \in D_X$, $P(X=x)=0$

ii)Pour a et b dans D_X,

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$



2) Calcul des intégrales (Rappel)

Soit f une fonction continue de **R** dans **R**, pour calculer l'intégrale, $\int_a^b f(x)dx,$

i) on détermine une primitive de f, c.à.d. une fonction F de **R** dans **R** telle que f est la dérivée de F ($f(x)=F'(x)$) et on note,

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

ii) On calcule:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

a) Propriétés des intégrales

Soient f et g deux fonctions réelles continues, a, b, c et λ des nombres réels,alors on a:

i) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

ii) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$

iii) Relation de Chasles

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

iv) Intégration par parties *(si f et g sont dérivables)*

$$\int_a^b (f'(x)g(x))dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

b) Primitives de quelques fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x) = \int f(x)dx.$
$x^{\alpha} \quad \forall\, \alpha \neq -1$	$x^{(\alpha+1)}/(\alpha+1).$
$1/x$	$Ln(x)=Log(x)$
$e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x}/\alpha.$
a^x avec $a>0$ et $a\neq 1$	$a^x/Ln(a).$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$
$Ln(\alpha x)$ avec $\alpha \neq 0$	$xLn(\alpha x) - x$

c) Application aux calculs des probabilités

Soit X une v.a.c., de densité de probabilité f, alors si on a une primitive F de f, on calcule la probabilité de l'événement *"$X \in [a;b]$"* par:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Exercice: Soit une v.a.c., de densité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} kx & si\ x \in [0;1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Déterminer k pour avoir une densité de probabilité et calculer P(1/4<X<1/2).

Solution: Pour avoir une densité de probabilité, il faut que $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in [0\ ;1]$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

On a, $f(x)=kx \geq 0$ si $k>0$. Et,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = k\int_0^1 xdx$$

$$= k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{k}{2} = 1,\ \ si\ \ k = 2.$$

$$P(1/4 < X < 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} f(x)dx$$

$$= 2\int_{1/4}^{1/2} xdx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/4}^{1/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

3) Caractéristiques d'une v.a.c.

Si X est une v.a.c., de densité de probabilité f, alors l'espérance E(X) et la variance V(X) de X sont données respectivement par:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \ \ si\ cette\ intégrale\ existe.$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X]^2 f(x)dx \ \ si\ cette$$

intégrale existe.

On a aussi:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= [\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx] - [E(X)]^2.$$

Remarque: Si X une v.a.c., de densité f et g une fonction réelle de D_X dans **R**, alors l'espérance de la v.a.c. $g(X)$ est donnée par:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

Exemple: Calculer E(X) et V(X) pour la v.a.c. de densité.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \in [0;1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$$
$$=2\int_0^1 x^2dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$
$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2;\ or$$
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2 f(x)dx$$
$$=2\int_0^1 x^3dx=2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$
$$donc\ \ V(X)=(1/2)-(2/3)^2=1/18$$
$$et\ \ \sigma_X=\sqrt{1/18}\approx 0{,}236.$$

4) Fonction de répartition d'une v.a.c.

a) Définition : Soit X une v.a.c. de densité de probabilité f, la fonction de répartition de X est l' application, F_X (ou F) de **R** dans [0, 1], définie par:

$$F_X(x)=P[X<x]=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

b) Propriétés :

La fonction de répartition F d'une v.a.c. X vérifie les propriétés suivantes :

i) Par définition on a , $0\leq F(x)\leq 1$, $\forall x \in$ **R**.

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1.$

iii) F est continue et croissante, donc F est bijective si elle est en plus strictement croissante.

iv) F est dérivable sauf en un nombre fini de points, et $F'(x)=f(x)$.

Remarque: F est une primitive de f, donc, la loi de probabilité d'une v.a.c. est déterminée soit par la densité f ou par la fonction de répartition F.

c) Application aux calculs des probabilités

Soit X une v.a.c., de densité de probabilité f, et de fonction de répartition F, alors on calcule les probabilités des intervalles, [a; b],]-∞; b] et [a; +∞[, par:

i) $P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a).$

ii) $P(X\leq b)=P(X<b)=\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=F(b).$

iii) $P(X\geq a)=\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=1-F(a).$

Exemple: Déterminer la fonction de répartition F de la v.a.c. de l'exemple précédent. Calculer P(X<1/4) et P(X<1/2) en déduire P(1/4<X<1/2).

On a: $f(x)=2x\ \ si\ x\in[0;1];\ \ f(x)=0\ \ sinon$

Donc, $\forall\ x \in$ **R**,

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0\ si\ x\leq 0\\ x^2\ \ si\ x\in[0;1]\\ 1\ \ si\ x>1\end{cases}$$

D'où:

P(X<1/4)=F(1/4)=1/16 et P(X<1/2)=F(1/2)=1/4;

donc, P(1/4<X<1/2)=F(1/2)-F(1/4)=3/16.

5) Densité d'une fonction de v.a.c.

Si X une v.a.c., de densité f_X et de fonction de répartition F_X, soit g une fonction réelle continue de D_X dans **R**, alors pour déterminer le densité de probabilité f_Y de la v.a.c. $Y=g(X)$ on détermine d'abord la fonction de répartition F_Y de Y, puis on obtient f_Y par dérivation de F_Y

$$f_Y(y)=F'_Y(y).$$

Ainsi, si g est strictement croissante donc elle admet une fonction réciproque g^{-1}, alors on a:

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(g(X)<y)=P(X<g^{-1}(y))=F_X(g^{-1}(y)).$$

Exemple: On considère la v.a.c. X de l'exemple précédent. Soit $g(x)=x^2$. Déterminer la fonction densité de $Y=g(X)=X^2$.

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ *et* $g^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

$F_Y(y)=P(Y<y)=P(X^2<y) \quad \forall y \in \mathbf{R}$.

Or $X^2 \geq 0$, donc $P(X^2<y)=0$ si $y<0$.

Si $y \geq 0$, on a: $F_Y(y)=P(X^2<y)=P(X<\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})$. Or,

$$F_X(\sqrt{y})=\begin{cases} 0 \text{ si } \sqrt{y}=0, (\text{si } y=0) \\ (\sqrt{y})^2 \quad \text{si } \sqrt{y}\in[0;1] \quad ,(\text{si } y\in[0;1]) \\ 1 \text{ si } \sqrt{y}>1, \ (\text{si } \ y>1) \end{cases}$$

D'où,

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 \text{ si } y\leq 0 \\ y \quad \text{si } y\in[0;1] \\ 1 \text{ si } \ y>1 \end{cases}$$

Donc,

$$f_Y(y)=F_Y^{'}(y)=\begin{cases} 1 \quad \text{si } y\in[0;1] \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

C'est la densité de la variable aléatoire continue uniforme sur l'intervalle [0; 1].

II) Lois continues usuelles

1) Loi uniforme

Soit [a; b] un intervalle de **R** (a<b), une v.a.v. X suit une loi uniforme continue sur [a;b] si sa densité de probabilité est donnée par:

$$f_X(x)=\begin{cases} 1/(b-a) \quad \text{si } x\in[a;b] \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc,

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 \ \text{ si } x\leq a \\ (x-a)/(b-a) \quad \text{si } x\in[a;b] \\ 1 \ \text{ si } \ x>b \end{cases}$$

On montre que:

$E(X)=(a+b)/2$ et $V(X)=(b-a)^2/12$.

2) Loi normale centrée et réduite

a) Définition: On dit qu'une v.a.c. U suit une loi normale centrée et réduite si sa densité de probabilité est donnée par:

$$f_U(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \forall u \in \mathbf{R}$$

On montre que, $\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-\frac{u^2}{2}})du=\sqrt{2\pi}$.

et on vérifie que :

$E(U)=0$ et $V(U)=1$, donc $\sigma_U=1$.

On note alors $U \sim N(0;1)$.

b) Fonction de répartition de U:

La fonction de répartition de la v.a. U~N(0; 1), que l'on note π est donnée par:

$\forall u \in \mathbf{R}$,
$$\pi(u)=P(U<u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}(e^{-\frac{x^2}{2}})dx.$$

D'où on calcule les probabilités par:

$P(a \leq U \leq b)=\pi(b)-\pi(a)$ et $P(U>a)=1-\pi(a)$.

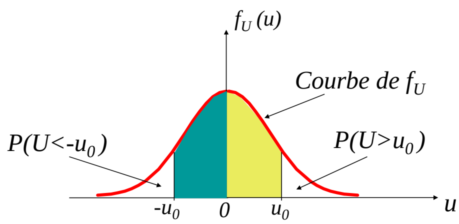
Mais le calcul de $\pi(u)$, pour u donnée, se fait par des méthodes numériques. D'où on a des tables statistiques qui donnent $\pi(u)$, pour différentes valeurs de u et inversement.

Remarque:

La densité f_U est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc il suffit de connaître les valeurs de $\pi(u)$ pour $u\geq 0$, et en déduire $\pi(u)$ pour $u\leq 0$ par symétrie.(voir graphique ci-dessous)

D'où la table statistique de la loi N(0;1), donne $\pi(u)$ pour $u\geq 0$.



$\pi(0)=P(U<0)=P(U>0)=0,5$.

Si $u>0$, on: $\pi(u)>0,5$ et $\pi(-u)<0,5$, avec

$\pi(-u) = P(U<-u)=P(U>u)=1-P(U<u)=1- \pi(u)$.

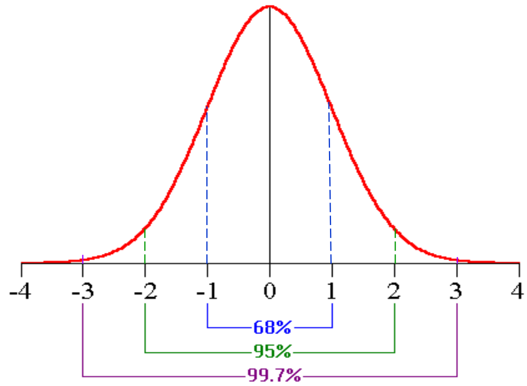
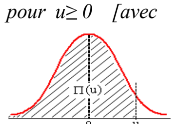


Table de la loi normale centrée réduite qui donne
$\pi(u) = P(U<u)$ pour $u \geq 0$ [avec $\pi(-u) = 1 - \pi(u)$]

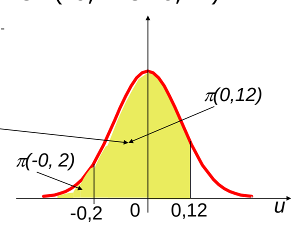


u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214

Exemples: Soit $U \sim N(0;1)$. Calculer $P(U<0,12)$ et $P(U<-0,2)$, en déduire $P(-0,2<U<0,12)$.

u	0,00	0,01	**0,02**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255

Probabilité



On a: $P(U<0,12)=\pi(0,12)=0,5478$ et

$P(U<-0,2)=1-\pi(0,2)=1-0,5793=0,4207$, donc

$P(-0,2<U<0,12)= \pi(0,12)- \pi(-0, 2)= 0,1271$.

3) Loi normale générale

a) Définition: Soient m et σ deux nombres réels avec ($\sigma > 0$). On dit qu'une v.a.c. X suit une loi normale générale de paramètres m et σ si sa densité de probabilité est donnée par:

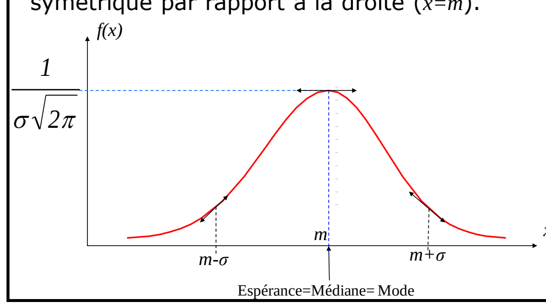
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

On montre que : $E(X)=m$ et $V(X)=\sigma^2$.

On note alors: $X \sim N(m;\sigma)$.

Remarque:

La courbe de la densité f_X a la même forme (en cloche) que la loi $N(0;1)$, mais elle est symétrique par rapport à la droite ($x=m$).



b) Relation entre N(m;σ) et N(0;1):

i) Soit X une v.a.c. de loi $N(m;\sigma)$, alors la v.a. U centrée et réduite associée à X suit une loi $N(0;1)$.

Si $X \sim N(m;\sigma)$, alors, $U = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0;1)$.

ii) Mais attention! Si a et b sont deux nombres réels (avec $a \neq 0$) et $U \sim N(0;1)$, alors la v.a. $X=aU+b$ suit une loi normale générale de paramètres $m=b$ et $\sigma=|a|$.

Si $U \sim N(0;1)$, alors, $X=aU+b \sim N(b;\ |a|\ )$,

c) Application aux calculs des probabilités

Soit X une v.a.c. de loi $N(m;\sigma)$, alors pour calculer les probabilités, $P(a<X<b)$, $P(X<a)$ ou $P(X>a)$, on procède comme suit:

i) On centre et on réduit la v.a. X, par,

$$U = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0;1).$$

ii) On utilise le fonction de répartition $\pi(u)$ de U pour calculer les probabilité à partir de la table de la loi $N(0;1)$.

- $$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} < \frac{X-m}{\sigma} < \frac{b-m}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{a-m}{\sigma} < U < \frac{b-m}{\sigma}\right)$$
$$= \pi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \pi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$
- $$P(X < a) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{a-m}{\sigma}\right) = \pi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$
- $$P(X > a) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{a-m}{\sigma}\right) = 1 - \pi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Exercice: On suppose que la durée de vie des ampoules électriques est une v.a.c. X de loi normale d'espérance m = 1000 heures et de variance σ² =10000.

Calculer probabilité qu'une ampoule fonctionne:

1) entre 1000 et 1200 heures?

2) moins que 750 heures?

Solution: On a, $X \sim N(1000;\ 100)$, car $\sigma=100$,

donc $U=(X-1000)/100 \sim N(0;\ 1)$,

1) $P(1000 \leq X \leq 1200) =$

$$\pi\left(\frac{1200-1000}{100}\right) - \pi\left(\frac{1000-1000}{100}\right) = \pi(2) - \pi(0).$$

Or, $\pi(2)$= 0,9772 et $\pi(0)$=0,5, donc

P(1000≤ X≤1200)= 0,9772-0,5=0,4772.

2) $P(X \leq 750) = \pi\left(\frac{750-1000}{100}\right) = \pi(-2,5).$

Or, $\pi(-2,5)$= 1- $\pi(2,5)$ = 1- 0,9938=0,0062.

par la table de N(0;1)

Donc, P(X≤750)= 0,0062.

Propriété:

Soient X_1, X_2, …, X_n, n v.a.c mutuellement indépendantes, telles que pour tout i, $X_i \sim N(m_i;\sigma_i)$. Alors la v.a Y= X_1+ X_2+ …+ X_n suit une loi normale générale de paramètres:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad et \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}.$$

4) Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Soit X une v.a.d. de loi binomiale B(n; p), si n est grand (n≥30) et p voisin de 0,5 (0,4≤p≤0,6), alors on utilise l'approximation de la loi binomiale par une loi normale générale de paramètres, $m = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$.

Dans la pratique, si n≥30, np≥15 et npq≥5 on a:

$$B(n;\ p) \approx N(np;\ \sqrt{npq}).$$

Exemple: Soit X une v.a.d. de loi binomiale B(100; 0,2). Calculer P(X=25) et P(10≤X≤30).

i) Avec la loi exacte on a:

P(X=25)= 0,0438 et P(10≤X≤30)= 0,9916.

ii) Par l'approximation, on a, n=100≥30, np=20≥15 et npq=16≥5; donc on peut utiliser l'approximation de cette loi binomiale par une loi normale N(20;4). D'où,

$$P(X = 25) \approx \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{25-20}{4}\right)^2} = \underline{0{,}0457}.$$

$$P(10 \le X \le 30) = P(-2{,}5 \le \frac{X-20}{4} \le 2{,}5)$$

$$\approx \pi(2{,}5) - \pi(-2{,}5) = 2\pi(2{,}5) - 1 = \underline{0{,}9876}.$$

5) Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Soit X une v.a.d. qui suit une loi de Poisson $\boldsymbol{P}(\lambda)$, avec λ suffisamment grand, alors on utilise l'approximation de la loi de Poisson par une loi normale générale de paramètres,

$$m = \lambda \ \ et \ \ \sigma = \sqrt{\lambda}.$$

Dans la pratique, si λ >15 on a:

$$\boldsymbol{P}(\lambda) \approx N(\lambda;\sqrt{\lambda}).$$

Exemple: Soit X une v.a.d. qui suit une loi de Poisson ***P****(100),* Calculer P(X=80) et P(90≤X≤110).

i) Avec la loi exacte on a:

P(X=80)= 0,0052 et P(90≤X≤110)= 0,7065.

ii) Par l'approximation, on a, λ =100>15, donc on peut utiliser l'approximation de cette loi de Poisson par une loi normale N(100; 10). D'où,

$$P(X = 80) \approx \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{80-100}{10}\right)^2} = \underline{0{,}0054}.$$

$$P(90 \le X \le 110) = P(-1 \le \frac{X-100}{10} \le 1)$$

$$\approx \pi(1) - \pi(-1) = 2\pi(1) - 1 = \underline{0{,}6826}.$$

Exercices Corrigés

Exercice 1: Soit une boîte contenant 20 composants électroniques dont 4 sont défectueux. On y tire au hasard et successivement 3 composants, avec remise si le composant est normal, sinon on le garde.

1) Calculer la probabilité d'avoir les trois composants défectueux.
2) Calculer la probabilité d'avoir les trois composants normaux.

Solution: Si on note les événements,
D^i =« avoir un composant défectueux au $i^{ème}$ tirage ».
N^i =« avoir un composant normal au $i^{ème}$ tirage ».
1) $P(D^1D^2D^3)= P(D^1)P(D^2 /D^1)P(D^3 /D^1D^2) = (4/20)\times(3/19)\times(2/18)=0,0035$.

2) $P(N^1N^2N^3) = P(N^1)P(N^2/N^1)P(N^3/N^1N^2) = P(N^1)P(N^2)P(N^3)=(16/20)\times(16/20)\times(16/20)$
$=(4/5)^3 = 0,512$.

Exercice 2: Dans une usine, 3 machines fabriquent des pièces mécaniques dans les proportions respectives suivantes: p_1=25%, p_2=35% et p_3=40%. On sait que le les taux de production de pièces défectueuses par les 3 machines sont respectivement de 10%, 5% et 1%.
On choisit au hasard une pièce dans un lot de pièces fabriquées par l'usine et on constate qu'elle est défectueuse. Quelle est probabilité qu'elle soit fabriquée par la $3^{ème}$ machine?

Solution: Si on note les événements,
D =« la pièce est défectueuse».
M_i =« la pièce est fabriquée par la $i^{ème}$ machine ».
On a:
i) $P(M_1)=0,25$; $P(M_2)=0,35$ et $P(M_3)=0,4$.
ii) $P(D/M_1)=0,1$; $P(D/M_2)=0,05$ et $P(D/M_3)=0,01$.
Donc par le théorème de Bayes on calcule la probabilité a posteriori $P(M_3 /D)$:

$$P(M_3 / D) = \frac{P(M_3)P(D/M_3)}{\sum_{j=1}^{3} P(M_j)P(D/M_j)} = \frac{0,004}{0,0465} = 0,086.$$

Exercice 3: Un lot de pièces mécaniques contient 5% de pièces défectueuses. On tire au hasard 7 pièces avec remise dans ce lot.
Calculer la probabilité d'avoir 2 pièces défectueuses parmi les 7 pièces tirées.
Solution: Soit A l'événement "avoir une pièce défectueuse lors d'un tirage", d'où, P(A)=p=0,05.
Tirer 7 pièces avec remise revient à effectuer 7 expériences de Bernoulli indépendantes.
Soit X la v.a. associée au nombre de pièces défectueuses parmi les 7 pièces tirées. D'où, $X \sim B(7; 0,05)$.
Donc, $DX=\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$ et pour tout $k \in DX$ on a,
On calcule alors:

$$P(X = 2) = C_7^2 0,05^2 0,95^5 \approx 0,041$$

Exercice 4: On sait que 4% d'une population de 1000 personnes ont une maladie M. On choisit au hasard et sans remise un échantillon de 10 personnes dans cette population.
Calculer la probabilité d'avoir 1 seule personne malade dans l'échantillon.
Solution:
On a, N=1000 et p=0,04, donc $N_1=pN=40$ et $N_2=N-N_1=960$.
Soit X la v.a. associée au nombre de personnes malades parmi les 10 choisies. D'où, $X \sim H(1000; 10; 0,04)$.
Donc,
$DX=\{k\in \mathbf{N}: \sup(0; 10-960) \le k \le \inf(10; 40)\}$
$DX=\{k\in \mathbf{N}: 0 \le k \le 10\}$
et pour tout $k\in DX$ on a,

$$P(X = k) = \frac{C_{40}^k \times C_{960}^{10-k}}{C_{1000}^{10}}.$$

i) Avec la loi exacte de X on a: (calcul fait par Excel)

$$P(X = 1) = \frac{C_{40}^1 \times C_{960}^9}{C_{1000}^{10}} \approx 0,2791.$$

ii) Le taux de sondage 10/1000=0,01<0,1, donc on peut utiliser l'approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale .
H(1000; 10; 0,04) ≈ B(10; 0,04).
D'où, on calcule une valeur approchée de P(X=1), par:

$$P(X=1)=C_{10}^{1}0,04^{1}0,96^{9}\approx 0,2770$$

Exercice 5: Le nombre de pannes d'une machine sur une période donnée suit une loi de Poisson. Sachant qu'en moyenne la machine fait 2 pannes par trimestre.
1) Calculer la probabilité de n'avoir aucune panne à un mois donné.
2) Calculer la probabilité d'avoir 4 pannes pendant une année.
Solution: Si l'unité de temps est le trimestre.
Soient les v.a. X, Y et Z associées respectivement au nombre de pannes de la machine pendant, un trimestre, un mois et une années. Donc,
X~ ***P***(2); Y~ ***P***(2/3) et Z~ ***P***(2×4)= ***P***(8).

1) $$P(Y=0)=\frac{e^{-(2/3)}\times(2/3)^{0}}{0!}=e^{-(2/3)}=0,513.$$

2) $$P(Z=4)=\frac{e^{-8}\times 8^{4}}{4!}\approx 0,0573.$$

Exercice 6: A l'entrée d'une station de train un marchand de journaux remarque qu'entre 8h et 9h en moyenne, une personne sur 10 achète un journal.
Sachant qu'ils passent 120 personnes entre 8h et 9h, et soit X la v.a. définie par :
X = « nombre de journaux vendus pendant cette période ».
1) Indiquer la loi de probabilité exacte de X.
2) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X
3) Calculer $P(X = 15)$ par la loi exacte puis par la loi approximative.
Solution:
1)Les personnes achètent les journaux indépendamment les unes des autres. Donc d'après la définition de X on a:
X~B(120; 0,1).
2) On a n=120≥50 et p=0,1≤0,1; donc on peut utiliser l'approximation d'une loi binomiale par une loi Poisson:
*B(120; 0,1) ≈ **P**(120×0,1) =**P**(12).*
3) Par la loi exacte on a: (calcul fait par Excel)

$$P(X=15)=C_{120}^{15}(0,1)^{15}(0,9)^{105}\approx 0,0742$$

Par la loi approximative on a:

$$P(X=15)\approx\frac{e^{-12}\times 12^{15}}{15!}\approx 0,0739.$$

Exercice 7: Une urne contient une proportion $p = 3/5$ de boules blanches et une proportion $q=1-p$ de boules noires.
On considère un tirage avec remise et on pose X : « le nombre de tirages nécessaires pour avoir une boule blanche » et Y : « le nombre de tirages nécessaires pour avoir 3 boules blanches ».
1) Quelle est la loi de X ? Calculer P(X=2).
2) Quelle est la loi de Y ? Calculer P(Y=5).
Solution: On a p=3/5=0,6 et q=0,4.
Le tirage étant avec remise, donc les tirages successifs sont indépendants.
D'où, d'après les définitions de X et Y on a:
1) X~ G(0,6), une loi géométrique de paramètre p=0,6 . D_X= $\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in D_X$,
$P(X=k)=0,6\times(0,4)^{k-1}$
Donc, $P(X=2)=0,6\times(0,4)^{1}=0,24$.

2) Y~ G(3; 0,6), une loi binomiale négative (ou loi de Pascal) de paramètres p=0,6 et m=3,
$D_Y=\{k\in\mathbb{N} : k\geq 3\}$ et pour tout $k\in D_Y$,

$$P(Y=k)=C_{k-1}^{2}(0,6)^{3}(0,4)^{k-3}.$$

Donc,

$$P(Y=5)=C_{4}^{2}(0,6)^{3}(0,4)^{2}\approx 0,2074.$$

Exercice 8: On suppose que la durée de vie des ampoules électriques est une v.a.c. X de loi normale d'espérance m = 1000 heures et de variance σ^2 =10000.
Calculer probabilité qu'une ampoule fonctionne:
1) entre 1000 et 1200 heures?
2) moins 750 heures?

Solution: On a, *X~N(1000; 100),* car σ=100,
donc *U=(X-1000)/100 ~N(0; 1),*

1) $$P(1000 \le X \le 1200) = \pi(\frac{1200-1000}{100}) - \pi(\frac{1000-1000}{100}) = \pi(2) - \pi(0).$$

Or, $\pi(2)$= 0,9772 et $\pi(0)$=0,5, donc
P(1000≤ X≤1200)= 0,9772-0,5=0,4772.

2) $$P(X \le 750) = \pi(\frac{750-1000}{100}) = \pi(-2,5).$$

Or, $\pi(-2,5)$= 1- $\pi(2,5)$ =1-0,9938=0,0062.

Donc, P(X≤750)= 0,0062.

Exercice 9 : Soient X et Y deux v.a.d. indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p (0<p<1).
On pose Z=X+Y et T=X-Y.
1) Déterminer la loi de Z est la loi de T.
2) Déterminer la loi conjointe du couple(Z ; T).
3) Z et T sont-elles indépendantes ? Justifier la réponse.
Solution :
1) Loi de Z : D_Z ={0, 1, 2}
P(Z=0)=P(X+Y=0)=P(X=0 et Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=$(1-p)^2=q^2$.
P(Z=1)=P(X+Y=1)=P(X=1 et Y=0)+ P(X=0 et Y=1)=P(X=1)P(Y=0)+ P(X=0)P(Y=1)=2pq.
P(Z=2)=P(X+Y=2)=P(X=1 et Y=1)=P(X=1)P(Y=1)= p^2.

$z \in D_Z$	0	1	2	Total
P(Z=z)	q^2	2pq	p^2	1

Loi de T : D_T ={-1, 0, 1}
P(T=-1)=P(X-Y=-1)=P(X=0 et Y=1)=P(X=0)P(Y=1)=pq.
P(T=0)=P(X-Y=0)=P(X=0 et Y=0)+ P(X=1 et Y=1)=P(X=0)P(Y=0)+ P(X=1)P(Y=1)= p^2+q^2.
P(T=1)=P(X-Y=1)=P(X=1 et Y=0)=P(X=1)P(Y=0)= pq.

$t \in D_T$	-1	0	1	Total
P(T=t)	pq	p^2+q^2	pq	1

2) Loi conjointe de (Z ; T).

T \ Z	0	1	2	Loi marginale de T
-1	0	pq	0	pq
0	q^2	0	p^2	p^2+q^2
1	0	pq	0	pq
Loi marginale de Z	q^2	2pq	q^2	1

3) On a, P(Z=0 ; T=-1)=0 et P(Z=0)P(T=-1)= $q^2pq \neq 0$, donc Z et T ne sont pas indépendantes.

Exercice 10 : Soit X une v.a.d. telle que D_X= **N** (ensemble des entiers naturels) et la loi de probabilité de X, *P(X=n)=f(n)*, vérifie :

$$f(n) = \frac{2}{n} f(n-1), \qquad \forall n \in N^*.$$

Déterminer explicitement l'expression de *f.*

Solution :

On *pose f(0)=c*, d'où,

$$f(1) = \frac{2}{1}c; \quad f(2) = \frac{2}{2} f(1) = \frac{2^2}{1 \times 2}c\,; \quad f(3) = \frac{2}{3} f(2) = \frac{2^3}{1 \times 2 \times 3}c; \cdots$$
$$f(n) = \frac{2}{n} f(n-1) = \frac{2^n}{n!}c; \ \cdots \ .$$

Or f(n) est une distribution de probabilité donc, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}c = c\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = ce^2 = 1\,.$$

D'où, $c = f(0) = e^{-2}$ et

$$P(X = n) = f(n) = \frac{e^{-2}\,2^n}{n!}, \qquad \forall n \in N.$$

Donc X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=2$

Exercice 11 : Une machine fabrique des pièces cylindriques caractérisées par leurs diamètres. Soit X la v.a.c. associée à la mesure des diamètres en centimètre, on suppose que X suit une loi normale générale d'espérance m et d'écart type σ.

Sachant que sur 50000 pièces fabriquées, on dénombre 16500 pièces dont le diamètre est inférieur à 1,6 cm et 5100 dont le diamètre est supérieur à 1,8 cm.

Déterminer l'espérance m et d'écart type σ.

Solution :

$X \sim N(m; \sigma)$, E(X)= m et V(X)= σ^2.

P(X<1,6)=16500/50000 =0,33 et P(X>1,8)= 5100/50000 =0,102.

$$P(X < 1{,}6) = P(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{1{,}6-m}{\sigma}) = \pi(\frac{1{,}6-m}{\sigma}) = 0{,}33 < 0{,}5.\ Donc\ \frac{1{,}6-m}{\sigma} < 0$$

$$d'où,\ \pi(\frac{m-1{,}6}{\sigma}) = 1 - \pi(\frac{1{,}6-m}{\sigma}) = 0{,}67,\ donc\ \frac{m-1{,}6}{\sigma} = 0{,}44\ \ (D'après\ la\ table\ de\ N(0;1)).$$

$$P(X > 1{,}8) = P(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{1{,}8-m}{\sigma}) = 1 - P(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{1{,}8-m}{\sigma}) = 1 - \pi(\frac{1{,}8-m}{\sigma}) = 0{,}102.$$

$$d'où,\ \pi(\frac{1{,}8-m}{\sigma}) = 1 - 0{,}102 = 0{,}898,\ donc\ \frac{1{,}8-m}{\sigma} = 1{,}27\ \ (D'après\ la\ table\ de\ N(0;1)).$$

d'où on a le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1{,}8-m}{\sigma} = 1{,}27 \\ \dfrac{m-1{,}6}{\sigma} = 0{,}44 \end{cases}, \quad donc \quad \begin{cases} m = 1{,}651\ cm \\ \sigma = 0{,}117\ cm \end{cases}.$$

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2004/2005 (3ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives
Section B

Enseignant : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 2 heures)*

N.B. • *Arrondir les calculs à la **4ème** décimale.*
• *Bien présenter la copie.*

Exercice 1 : (6 points)

Une usine doit recruter **3** ouvriers parmi **8** candidats dont **5** hommes et **3** femmes.

1) Si les taches des ouvriers sont identiques.

a) Quel est le nombre de sélections différentes possibles?

b) Calculer la probabilité **p** d'embaucher **deux** hommes et **une** femme.

2) Reprendre les questions **a)** et **b)** dans le cas où les taches des ouvriers sont distinctes.

Exercice 2 : (4 points)

Dans une usine, trois machines fabriquent des pièces mécaniques dans les proportions respectives suivantes: p_1=**50%**, p_2=**30%** et p_3=**20%**. On sait que les taux de production de pièces défectueuses par les 3 machines sont respectivement de **2%**, **5%** et **7%**. On choisit au hasard une pièce dans un lot de pièces fabriquées par l'usine et on note l'événement, D = « avoir une pièce défectueuse».

1) calculer la probabilité de D.

2) Sachant qu'on a obtenu une pièce normale lors d'un tirage, quelle est probabilité qu'elle soit fabriquée par la première machine?

Exercice 3 : (6 points)

On suppose que, le dimanche entre 8 heure et 10 heure, le nombre de véhicules passant par une station de péage d'une autoroute est une variable aléatoire *X* qui suit une loi de Poisson d'espérance ***36****.*

I) **1)** Par quelle loi peut-on approcher la loi de X?

2) En utilisant la loi approximative, calculer la probabilité que le nombre de véhicules passant par la station pendant cette période ne dépasse pas **39** véhicules.

II) On suppose que les poids lourds représentent **25%** des véhicules passant par la station pendant cette période et que les véhicules arrivent indépendamment les uns des autres. On pose :
Y = « le nombre de poids lourds passant par la station pendant cette période».

1) Déterminer la loi conditionnelle de $(Y / X = n)$.

2) Déterminer la loi marginale de *Y* et donner son expression.

3) Calculer la probabilité que le nombre de poids lourds passant par la station pendant cette période soit égal à **11**.

N.B. (Les parties **I** et **II** sont indépendantes)

Exercice 4 : (4 points)

On suppose que la durée de vie des ampoules d'un certain type de vidéo projecteurs est une variable aléatoire X de loi normale d'espérance **3000** heures et d'écart type **100** heures.

1) Donner l'expression de la densité de probabilité de X.

2) Quelle est la probabilité qu'une ampoule fonctionne moins que **2900** heures?

3) Déterminer la durée de vie minimale x_m qu'une ampoule peut dépasser avec une probabilité de **0,99**.

Extrait de la table de la fonction de répartition π(u) de la loi normale centrée réduite

u	0,1	0,5	1	1,1	1,5	2,3	2,327	2,5
π(u)=P(U<u)	0,5398	0,6915	0,8413	0,8643	0,9332	0,9893	0,99	0,9938

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques, Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2004/2005 (3ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives 2
Section B

Enseignant : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 *(Session de rattrapage)*

(Durée 1 heure 30mn)

N.B. • *Arrondir les calculs à la 4ème décimale.*
• *Bien présenter la copie.*

Exercice 1 : (4 points)

Soit une boîte contenant **30** composants électroniques dont **5** sont défectueux. On y tire au hasard et successivement **3** composants, avec remise si le composant est normal, sinon on le garde.

3) Calculer la probabilité d'avoir les **trois** composants défectueux.
4) Calculer la probabilité d'avoir les **trois** composants normaux.

Exercice 2 : (4 points)

Le nombre de pannes d'une machine sur une période donnée suit une loi de Poisson. Sachant qu'en moyenne la machine fait **une** panne par mois.

1) Calculer la probabilité de n'avoir aucune panne à un mois donné.
2) Calculer la probabilité d'avoir au plus 2 pannes pendant une année.

Exercice 3 : (6 points)

Une machine fabrique des pièces cylindriques caractérisées par leurs diamètres. Soit X la v.a.c. associée à la mesure des diamètres en millimètres (mm). On suppose que X suit une loi normale générale d'espérance **m = 16,5 mm** et d'écart type **σ = 0,8 mm**.

Un service de contrôle classe les pièces fabriquées en trois catégories : les pièces acceptables ou normales dont le diamètre est compris entre **15,5 mm** et **17,5 mm** ; les pièces défectueuses par défaut dont le diamètre est inférieur à **15,5 mm** et les pièces défectueuses par excès dont le diamètre est supérieur à **17,5 mm**.

1) On choisit au hasard une pièce fabriquée par cette machine, calculer.
  a) la probabilité que la pièce soit défectueuse par défaut.
  b) la probabilité que la pièce soit défectueuse par excès.
  c) la probabilité que la pièce soit acceptable

2) Calculer l'effectif de chacune des trois catégories parmi 5000 pièces fabriquées par la machine.

Exercice 4 : (6 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre **p = 0,3**. On pose Z=X+Y et T=X-Y.

1) Déterminer la loi de Z est la loi de T.
2) Déterminer la loi conjointe du couple (Z ; T).
3) Z et T sont-elles indépendantes ? Justifier la réponse.
4) Calculer la covariance du couple (Z ; T). Interpréter et commenter le résultat.

Extrait de la table de la fonction de répartition $\pi(u)$ de la loi normale centrée réduite

u	0,1	0,25	0,75	1,00	1,25	1,5	2,25	2,5
$\pi(u)=P(U<u)$	0,5398	0,5987	0,7734	0,8413	0,8944	0,9332	0,9878	0,9938

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques, Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2005/2006 (3ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Section B

Enseignant : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 2 heures)*

N.B.
- *Arrondir les calculs à la **4ème** décimale.*
- *Bien présenter la copie.*

Exercice 1 : (4 points)

Dans un atelier d'assemblage de micro-ordinateurs on utilise trois types de microprocesseurs M_1, M_2 ou M_3 dont les pourcentages de non conformité sont respectivement de : 3 %, 2 % et 1 %.
On suppose que 15 % des micro-ordinateurs portent le microprocesseur M_1, 40 % portent le microprocesseur M_2 et 45 % portent le microprocesseur M_3.
Si on choisit au hasard un micro-ordinateur et on constate que son microprocesseur est conforme, quelle est la probabilité qu'il soit du type M_2 ? (Donner une formulation du problème avant de répondre à la question).

Exercice 2 : (6 points)

Dans une usine le personnel d'un département comporte 5 ingénieurs et 10 techniciens.
Si on en prélève 4 au hasard pour former une équipe, sans tenir compte de leur qualité d'ingénieur ou de technicien. Calculer les probabilités des événements suivants:

1) A = « l'équipe comporte exactement deux ingénieurs ».
2) B = « l'équipe comporte exactement trois techniciens ».
3) C = « l'équipe comporte au moins un ingénieur ».

Exercice 3 : (6 points)

Le service après-vente d'un magasin reçoit, entre 15 h et 18 h, un appel téléphonique par 5 minutes. On suppose que le nombre d'appels X par **tranches de 5 minutes**, entre 15 h et 18 h, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

1) Calculer la probabilité de recevoir entre 17 h et 17 h 05 :
  a) Zéro appel.
  b) Au moins deux appels.

2) Soit Y la variable aléatoire associée au nombre d'appels téléphoniques entre 15 h et 18 h.
  a) Quelle est la loi de probabilité de Y? Donner son expression.
  b) Par quelle loi peut-on approcher la loi de Y? Justifier la réponse.
  c) En utilisant la loi approximative, calculer la probabilité que le service après-vente reçoive plus que 45 appels entre 15 h et 18 h.

Exercice 4 : (4 points)

Une machine automatique remplit des petits sachets de café dont le poids Y en gramme est distribué selon une loi normale générale d'espérance **m** et d'écart type **σ**.
Sachant que **5,48%** des sachets remplis ont un poids inférieur à ***96*** *g* et **0,82%** des sachets remplis ont un poids supérieur à ***106*** *g*.

1) Déterminer l'espérance m et l'écart type σ de la variable aléatoire Y.
2) Calculez la probabilité qu'un sachet pris au hasard ait un poids compris entre 98 g et 102 g.

Extrait de la table de la fonction de répartition π(u) de la loi normale centrée réduite

u	0,1	0,5	0,8	1	1,5	1,6	2,3	2,4	2,5
π(u)=P(U<u)	0,5398	0,6915	0,7881	0,8413	0,9332	0,9452	0,9893	0,9918	0,9938

Epreuve de Statistique 2 *(Session de rattrapage)*

(Durée 1 heure)

N.B. • *Arrondir les calculs à la* ***4ème*** *décimale.*
• *Bien présenter la copie.*

Exercice 1 : (4 points)

Le service médical d'une usine de ciment relève les statistiques suivantes :
10 % des employés ont une maladie M, parmi ces malades 80 % sont des fumeurs, alors que parmi les non malades il n y'a que 5 % de fumeurs. On choisit au hasard un employé de cette usine. On note les événements suivants :
M = " l'employé a la maladie M " ; N = " l'employé n'a pas la maladie M " et
F = " l'employé est fumeur ".

1) Donner les probabilités P(M), P(N), P(F|M) et P(F|N). On en déduit la probabilité P(F).

2) On sait qu'un employé est fumeur, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Exercice 2 : (8 points)

Dans une faculté de **5200** étudiants, on compte **130** étudiants inscrits au troisième cycle. On choisit au hasard **80** étudiants différents parmi les **5200**, pour bénéficier d'une formation en informatique. On désigne par *X* : « le nombre d'étudiants de troisième cycle parmi les **80** choisis ».

1) Quelle est la loi exacte de *X* ? Donner son expression, son espérance et sa variance.

2) Préciser, en le justifiant, deux lois discrètes approximatives de *X,* et donner l'expression de chacune.

3) En utilisant la loi approximative la plus appropriée, calculer la probabilité *qu'**au moins trois** étudiants de troisième cycle bénéficient de la formation en informatique.*

Exercice 3 : (8 points)

Le gain net annuel d'une entreprise en **millions** de *Dirhams* (*mDh*) est une variable aléatoire *X* de densité : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{0{,}08\pi}} e^{\frac{-(x-2)^2}{0{,}08}}$ *pour tout* $x \in R.$

1) Donner l'espérance et l'écart type du gain net annuel de l'entreprise.

2) Quelle est la probabilité que l'entreprise réalise un gain net annuel compris entre ***1 600 000 Dh*** et ***2 400 000 Dh*** ?

3) Comparer le résultat obtenu en **2)** à la probabilité minimale prévue par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Conclure.

Extrait de la table de la fonction de répartition π(u) de la loi normale centrée réduite

u	0,1	0,75	1,00	1,5	2	2,25	2,5
π(u)=P(U<u)	0,5398	0,7734	0,8413	0,9332	0,9773	0,9878	0,9938

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2006/2007 (3ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections B & D
Enseignants : BENHMIDA & RACHIDI

Epreuve de Statistique 2

Exercice 1 : Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches. Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches. On choisit une urne au hasard, et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie.

On note les événements suivants :

B_1 = «obtenir une boule blanche au 1er tirage»

B_2 : «obtenir une boule blanche au 2ème tirage».

Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 2 : Un test de fabrication des pièces dans une usine est tel que :

Si la pièce est bonne elle est acceptée avec la probabilité de 99%.

Si la pièce est mauvaise elle est refusée avec la probabilité de 99%.

On choisit une pièce au hasard et on la teste. Quelle est la probabilité :

1) Qu'elle y ait une erreur de contrôle ?

2) Qu'une pièce soit mauvaise?

On suppose que la proportion des pièces défectueuses parmi les pièces testées est de 0,5%

Exercice 3 : Un joueur lance 3 fois de suite un dé à 6 faces portant les chiffres : 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6. Les sorties des six faces sont supposées équiprobables.

1) Si X désigne le nombre de multiples de 3 obtenus au cours des trois lancers, quelle est la loi de X ?

2) Calculer son espérance mathématique et sa variance.

3) Quelle est la probabilité pour le joueur, d'obtenir au moins un multiple de 3 au cours des trois lancers ?

4) Quelle est la probabilité pour la somme des trois chiffres soit égale à 10 ?

Exercice 4 : Soit X une variable aléatoire continue de densité définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x} & si \quad -e \leq x < -1 \\ x+1-a & si \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a.

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques, Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2006/2007 (3ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections B & D

Enseignants : BENHMIDA & RACHIDI

Epreuve de Statistique 2 *(Session de rattrapage)*

(Durée 1 heure)

N.B.
- *Arrondir les calculs à la 3ème décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (8 points)

D'après le recensement général de la population et de l'habitat de 2004, la répartition de la population marocaine, selon le statut d'occupation des logements et le milieu d'habitat, est donnée par le tableau suivant :

Statut d'occupation	Milieu	
	Urbain	Rural
Propriétaire	56,8	85,8
Locataire	29,2	2,0
Autres	14,0	12,2
Total	100%	100%

Selon le même recensement la population urbaine représente 55% de la population nationale.
En assimilant ces pourcentages à des probabilités et si on choisit un marocain au hasard.

1) Quelle est la probabilité que ce marocain soit locataire ?

2) Sachant que ce marocain est propriétaire, quelle est la probabilité qu'il soit rural ?

Exercice 2 : (12 points)

Sur une chaîne de montage d'appareils électroniques on a constaté qu'en moyenne 0,4% des appareils sortent défectueux.
Dans un lot de 1000 appareils en provenance de cette chaîne, on prélève simultanément 50 appareils. On considère la variable aléatoire X associée au nombre d'appareils défectueux parmi les 50 prélevés.

1) Quelle est la loi exacte de X ? Donnez son expression et calculez son espérance et sa variance.

2) Précisez, en le justifiant, les deux lois discrètes approximatives de X et donnez l'expression de chacune.

3) En choisissant parmi ces deux lois approximatives celle qui convient, calculez les probabilités des événements suivants :

- **a)** Aucun appareil n'est défectueux.
- **b)** Deux appareils sont défectueux.
- **c)** Aux moins deux appareils sont défectueux.

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2007/2008 (3ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections B & D

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 1 h 30 min)*

N.B.
- *Arrondir les calculs à la* ***3ème*** *décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (5 points) *(Durée estimée : 15 min)*

Selon le recensement général de la population et de l'habitat de 2004, dans la région de Fès Boulemane, **72 %** de la population est urbaine. On sait aussi que **41,3 %** des urbains et **37,1 %** des ruraux de cette population sont célibataires. On interroge au hasard un individu de cette région. On note U l'événement *"être un urbain"*, R l'événement *"être un rural"*, et C l'événement *"être un célibataire"*.

1) Quelles sont les probabilités suivantes : $P(U)$; $P(R)$; $P(C|U)$ et $P(C|R)$?

2) Calculer la probabilité pour qu'un individu interrogé soit célibataire.

3) Sachant que la personne interrogée n'est pas célibataire, quelle est la probabilité pour qu'elle soit du milieu rural?

Exercice 2 : (5 points) *(Durée estimée : 15 min)*

Une banque constate que les chèques sans provision représentent **2%** des chèques émis par les clients.

Un jour donné, **250** clients ont émis chacun un chèque. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de chèques sans provision lors de ce jour.

On suppose que les clients émettent leurs chèques indépendamment les uns des autres.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ? Donner son espérance et son écart type.

2) Calculer la probabilité de n'avoir aucun chèque sans provision parmi les 250 émis.

3) Par quelle loi discrète peut on approcher la loi de X ? Donner son expression.

4) En utilisant la loi approximative, calculer la probabilité d'avoir au moins deux chèques sans provision parmi les 250 émis.

Exercice 3 : (4 points) *(Durée estimée : 20 min)*

Soit ($r > 0$) le revenu minimum dans une population. Le revenu des individus de cette population est une variable aléatoire continue X caractérisée par la densité suivante :

$$f(x) = \frac{k}{x^4} \quad si \quad x \geq r \quad et \quad f(x) = 0 \quad si \quad x < r$$

1) Déterminer k en fonction de r pour que f soit une densité de probabilité. Calculer $E(X)$.

2) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

3) Calculer la probabilité qu'un individu gagne plus que le revenu moyen.

Voir au verso ☞

Exercice 4 : (4 points) *(Durée estimée : 15 min)*

On suppose que la consommation mensuelle d'eau en m^3 d'un ménage est représentée par une variable aléatoire X de loi normale générale d'espérance **9** m^3 et d'écart type **2** m^3.

1) Calculer la probabilité que la consommation d'eau de ce ménage dépasse **14** m^3 par mois.

2) Un secteur comporte **225** ménages dont les consommations mensuelles sont des variables aléatoires X_i supposées mutuellement indépendantes et toutes de même loi normale $N(9 ; 2)$.

Soit Y la variable aléatoire associée à la consommation mensuelle d'eau du secteur.

a) Quelle est la loi de Y ? Déterminer sa moyenne et son écart type.

b) On suppose que le secteur est alimenté en eau par une station de pompage. Calculer le volume minimal que la station doit fournir au secteur chaque mois pour satisfaire à la demande avec une probabilité supérieure ou égale à **0,99**.

Extrait de la table de la fonction de répartition $\pi(u)$ de la loi normale centrée réduite
(Valeurs arrondies)

u	0,1	0,5	0,8	1	1,5	1,6	2,3	2,326	2,4	2,5
$\pi(u) = P(U<u)$	0,54	0,692	0,788	0,841	0,933	0,945	0,989	0,99	0,992	0,994

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques, Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2007/2008 (3ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections B & D

Epreuve de Statistique 2 (Session de rattrapage)

(Durée 1 h 30 min)

N.B.
- *Arrondir les calculs à la 3ème décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (6 points) *(Durée estimée : 15 min)*

On utilise un test sanguin pour le dépistage d'une maladie M qui touche 0,6% d'une population. Ce test est positif dans 95% des cas si la personne est malade et il est négatif dans 90% des cas si la personne n'est pas malade. On choisit au hasard une personne de la population et on définit les événements suivants :

M = « la personne est malade » et T = « le test est positif ».

1) Calculez la probabilité que le test soit positif.

2) Pour une personne le test est négatif, quelle est la probabilité que la personne ne soit pas malade ?

3) Calculez la probabilité que le test se trompe (le test est positif et la personne n'est pas malade ou le test est négatif et la personne est malade).

Exercice 2 : (7 points) *(Durée estimée : 30 min)*

Sur une chaîne de montage d'appareils électroniques on a constaté qu'en moyenne 2% des appareils sortent défectueux.

Dans un lot de 1000 appareils en provenance de cette chaîne, on prélève simultanément 50 appareils. On considère la variable aléatoire X associée au nombre d'appareils défectueux parmi les 50 prélevés.

1) Quelle est la loi exacte de X ? Donnez son domaine et son expression et calculez son espérance et sa variance.

2) Précisez, en le justifiant, les deux lois discrètes approximatives de X et donnez l'expression de chacune.

3) En choisissant parmi ces deux lois approximatives celle qui convient, calculez les probabilités des événements suivants :

- **a)** Aucun appareil n'est défectueux.
- **b)** Deux appareils sont défectueux.
- **c)** Aux moins deux appareils sont défectueux.

Voir au verso ☞

<u>Exercice 3</u> : (7 points) *(Durée estimée : 20 min)*

Une usine fabrique des pièces mécaniques et constate que pour un type de pièces, la demande mensuelle (en milliers de pièces) est une variable aléatoire continue X de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{0{,}125\pi}} e^{-8(x-4)^2} \qquad pour\ tout\ \ x \in R$$

1) Quelle est la loi de X ? Déterminez l'espérance et l'écart type de X avec leur unité.

On suppose maintenant que l'espérance de X est de **4 mille** pièces est son écart type est **0,25 mille** pièces.

2) Quelle est la probabilité pour que la demande ne dépasse pas **4500** pièces en un mois ?

3) Le stock d'un mois est **4600** pièces. Calculez la probabilité que la demande ne soit pas satisfaite.

4) Quelle est le nombre minimal x_m de pièces que doit stocker l'usine chaque mois pour satisfaire la demande avec une probabilité de 0,98 ?

Extrait de la table de la fonction de répartition π(u) de la loi normale centrée réduite
(Valeurs arrondies)

u	*0,5*	*0,8*	*1*	*1,5*	*2*	*2,054*	*2,1*	*2,3*	*2,4*	*2,5*
π(u) = P(U<u)	*0,692*	*0,788*	*0,841*	*0,933*	*0,977*	*0,98*	*0,982*	*0,989*	*0,992*	*0,994*

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2008/2009 (3ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections C & D
Professeur : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 1 h 30 min)*

N.B.
- *Arrondir les calculs à la 3ème décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (5 points) *(Durée estimée : 15 min)*

Une compagnie d'assurance automobile constate, d'après une longue expérience, que 80% des conducteurs sont des 'bons conducteurs'. Les bons conducteurs ont une probabilité de 0,1 d'avoir un accident pendant une année, alors que les mauvais ont une probabilité de 0,7 d'en avoir un pendant la même période.

On choisit un conducteur au hasard et on définit les événements suivants :
A= « le conducteur a eu un accident pendant une année » ; B= « avoir un bon conducteur ».

1) calculer les probabilités suivantes : $P(B)$; $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$.
2) Calculer la probabilité de A.
3) Un conducteur n'ayant pas eu d'accident au cours de la dernière année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon conducteur ?

Exercice 2 : (5 points) *(Durée estimée : 15 min)*

Le département Sciences Economiques d'une faculté, comporte **40** enseignants chercheurs dont, **14** sont des Professeurs de l'Enseignement Supérieur (PES), **8** sont des Professeurs Habilités (PH) et **18** sont des Professeurs de l'enseignement supérieur Assistants (PA). Le département décide de former une commission de **5** enseignants. Si le choix des enseignants est au hasard, calculer les probabilités des événements suivants:
1) A = « la commission est formée de 5 PES ».
2) B = « la commission est formée de 5 PA ».
3) C = « la commission est formée de 2 PES, 1 PH et 2 PA».

Exercice 3 : (6 points) *(Durée estimée : 25 min)*

On suppose que sur un axe routier, le nombre d'accidents pendant une semaine est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson **d'écart type** ***5***, et on a constaté que **4%** de ces accidents sont mortels.

Si on pose : Y = « le nombre d'accidents mortels sur cet axe routier pendant une semaine».
1) Quel est le nombre moyen d'accidents pendant une semaine sur cet axe routier ?
2) Donnez l'expression de la loi de X et déterminez la loi conditionnelle de $(Y / X = n)$.
3) Déterminer la loi marginale de Y et donner son expression.
4) Calculer la probabilité que, pendant une semaine, le nombre d'accidents mortels sur cet axe routier soit supérieur ou égal à **2**.

Exercice 4 : (4 points) *(Durée estimée : 10 min)*

Dans un moulin, les sacs de farine de 25 Kilogrammes (Kg) sont remplis par une machine automatique. Une étude a permis de constater que le poids X en Kg, des sacs remplis, n'est pas parfait, mais il est distribué selon une loi normale générale d'espérance **m = 25 Kg** et de variance $\sigma^2 = 0{,}64$.
1) Donner en fonctions de **m** et **σ** la densité de la variable aléatoire X associées au poids des sacs de farine.
2) Calculer la probabilité que le poids d'un sac de farine dépasse **26** Kg.

Extrait de la table de la fonction de répartition $\pi(u)$ de la loi normale centrée réduite
(Valeurs arrondies)

u	0,1	0,5	0,8	1	1,25	1,5	2,3	2,4	2,5
$\pi(u) = P(U<u)$	0,54	0,692	0,788	0,841	0.894	0,933	0,989	0,992	0,994

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques, Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2009/2010 (3ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections C & D

Professeur : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 (Durée 1 h 30 min)

N.B.
- *Arrondir les calculs à la* ***4ème*** *décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (5 points) *(Durée estimée : 15 min)*

Soit une boîte contenant **2** boules blanches et **8** boules noires. On procède à des tirages successifs avec remise, d'une boule de cette boîte, et on considère la variable aléatoire X définie par :

X = « le nombre de tirages nécessaires pour avoir ***4*** *boules noires »*

1) Quelle est la loi de *X*? Donner son domaine et son expression.
2) Calculer l'espérance et la variance de *X*.
3) Calculer P(*X* =6).

Exercice 2 : (5 points) *(Durée estimée : 15 min)*

La demande mensuelle X d'un produit suit une loi normale d'espérance **100 unités** et de variance **144**. Le stock au début de chaque mois est de **127 unités**.
1) Calculer la probabilité que la demande mensuelle ne soit pas satisfaite.
2) Calculer la probabilité que la demande mensuelle du produit soit comprise entre **85** et **115**.
3) Quelle est la valeur maximale du stock mensuel pour satisfaire la demande mensuelle dans **96%** des cas ?

Extrait de la table de la fonction de répartition $\pi(u)$ de la loi normale centrée réduite
(Valeurs arrondies)

u	*0,1*	*0,5*	*0,8*	*1*	*1,2*	*1,25*	*1,5*	*1,7*	*1,75*	*2,25*	*2,5*
$\pi(u) = P(U<u)$	*0,54*	*0,692*	*0,788*	*0,841*	0,885	0.894	*0,933*	*0,955*	*0,960*	*0,988*	*0,994*

Exercice 3 : (10 points) *(Durée estimée : 40 min)*

On constate que **3%** des composants électroniques fabriqués par une usine sont défectueux.

A) Tous les composants sont contrôlés par un appareil tel que ; si un composant est normal l'appareil le déclare ainsi dans **99%** des cas mais si le composant est défectueux il le déclare ainsi dans **95%** des cas.
On choisit au hasard un composant fabriqué par cette usine et on définit les événements suivants :
A = «l'appareil déclare le composant normal » et N = «le composant est normal».
1) Calculer les probabilités suivantes : $P(N);\ P(A/N);\ P(\overline{A}/\overline{N})$.
2) Calculer la probabilité que l'appareil déclare un composant défectueux.
3) L'appareil déclare un composant normal, quelle est la probabilité qu'il le soit effectivement ?
4) Calculer la probabilité que l'appareil se trompe.

B) On tire simultanément **100** composants parmi **10000** composants fabriqués par cette usine et on considère la variable aléatoire définie par :
X = « le nombre des composant défectueux parmi les **100** tirés».
1) Quelle est la loi exacte de X ? Donner son domaine et son expression.
2) Calculer l'espérance et la variance de X.
3) En le justifiant, donner les expressions des deux lois approximatives discrètes de X.
4) En utilisant la loi approximative convenable, calculer la probabilité d'avoir au plus un composant défectueux parmi les 100.

Remarque : Les parties **A)** et **B)** sont indépendantes.

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2009/2010 (3ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections C & D

Professeur : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 1 h)*
Session de rattrapage

N.B.
- *Arrondir les calculs à la **4ème** décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (10 points) *(Durée estimée : 20 min)*

Des sacs de farine de 25 Kilogrammes (Kg) sont remplis par une machine automatique. Une étude a permis de constater que le poids X en Kg, des sacs remplis, est une variable aléatoire suivant une loi normale générale d'espérance **m** et d'écart type **σ**.

Sachant que **0,75 %** des sacs ont un poids supérieur à **26,3** Kg et **12,1 %** des sacs ont un poids inférieur à **24,5** Kg.

1) Donner en fonctions de **m** et **σ** la densité de la variable aléatoire X associées au poids des sacs de farine.

2) Déterminer l'espérance **m** et l'écart type **σ** de la variable aléatoire X. (Indication : on détermine un système de deux équations linéaires en **m** et **σ**)

3) Calculer la probabilité d'avoir un sac de farine dont le poids est supérieur à **26** Kg.

Extrait de la table de la fonction de répartition $\pi(u)$ de la loi normale centrée réduite

u	0,1	0,25	1,00	1,17	1,18	1,83	2,43	2,5
$\pi(u)=P(U<u)$	0,5398	0,5987	0,8413	0,8790	0,8810	0,9664	0,9925	0,9938

Exercice 2 : (10 points) *(Durée estimée : 25 min)*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre **p = 0,4**. On pose U=X +Y et V=X-Y.

1) Déterminer la loi de U est la loi de V.

2) Déterminer la loi conjointe du couple (U ; V).

3) U et V sont-elles indépendantes ? Justifier la réponse.

4) Calculer la covariance du couple (U ; V). Interpréter et commenter le résultat.

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2009/2010 (2ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections C & D
Professeur : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 1 h 30 min)*

N.B.
- *Arrondir les calculs à la **3ème** décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (4 points) *(Durée estimée : 10 min)*

Un électricien achète respectivement **40 %** et **60 %** des lampes électriques chez deux fournisseurs **A** et **B**. Dans son atelier il met toutes les lampes dans une même boîte et de cette boîte il tire au hasard une lampe. Sachant que **5 %** des lampes fournies par **A** sont défectueuses alors que cette proportion et de **10 %** pour les lampes fournies par **B**.
On définit les événements suivants : A = « la lampe est fournie par **A** » ; B = « la lampe est fournie par **B** » et D = « la lampe est défectueuse »
1) Calculer la probabilité d'avoir une lampe défectueuse.
2) Sachant que la lampe tirée est normale, calculer la probabilité qu'elle soit fournie par **B** et en déduire la probabilité qu'elle soit fournie par **A**.

Exercice 3 : (10 points) *(Durée estimée : 35 min)*

On suppose que le nombre de personnes qui visitent un magasin, par tranches de **15 minutes** entre 18 h et 19 h, est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre **4**, et que **la moitié** des visiteurs effectuent un achat indépendamment les uns des autres.
1) Calculez la probabilité que le magasin soit visiter entre 18 h et 18 h 15 par :
- **a)** Deux personnes.
- **b)** Au moins trois personnes.

2) On considère les deux variables aléatoires discrètes suivantes :
Y = « le nombre de personnes qui visitent le magasin entre 18 h et 19 h » et Z = « le nombre de personnes ayant effectuées un achat dans le magasin entre 18 h et 19 h »
- **a)** Déterminer la loi de Y et donner son expression, ainsi que son espérance.
- **b)** Déterminer la loi conditionnelle de (Z / Y = n) et donner son expression.
- **c)** Déterminer la loi marginale de Z et donner son expression, ainsi que son espérance et son écart type.
- **d)** Déterminer par l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff un majorant de la probabilité suivante : $P(|Z-8|>4)$.

Exercice 2 : (6 points) *(Durée estimée : 25 min)*

Une usine utilise **9** machines indépendantes de même type pour la production des pièces mécaniques. On suppose que la production mensuelle d'une machine en **milliers** de pièces est une variable aléatoire X de loi normale générale d'espérance **9** (c.à.d. 9 mille pièces) et de variance **4**.
1) Calculer la probabilité que la production mensuelle de la machine dépasse l'espérance de X.
2) Calculer la probabilité que la production mensuelle de la machine soit comprise ente **8000** et **12000** pièces.
3) Soit Y la variable aléatoire associée à la production mensuelle de l'usine en milliers de pièces.
- **a)** Quelle est la loi de Y ? Déterminer sa moyenne et son écart type.
- **b)** Calculer la production mensuelle minimale que l'usine peut atteindre avec une probabilité de ***0,99***.

Extrait de la table de la fonction de répartition π(u) de la loi normale centrée réduite (Valeurs arrondies)

u	*0,1*	*0,5*	*0,8*	*1*	*1,5*	*1,6*	*2,3*	*2,326*	*2,4*	*2,5*
π(u) = P(U<u)	*0,54*	*0,692*	*0,788*	*0,841*	*0,933*	*0,945*	*0,989*	*0,99*	*0,992*	*0,994*

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2009/2010 (2ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections C & D
Professeur : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 1 h)*
Session de rattrapage

N.B.
- *Arrondir les calculs à la **4** ème décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (5 points) *(Durée estimée : 15 min)*

Soit une urne contenant ***75%*** de boules noires et **25%** de boules blanches. On procède à des tirages successifs avec remise d'une boule de cette urne, et on considère la variable aléatoire X définie par : *X = « le nombre de tirages nécessaires pour avoir **6** boules blanches »*

1) Quelle est la loi de *X* ? Donnez son domaine et son expression.
2) Calculer l'espérance et la variance de X.
3) Calculer P(X=7).

Exercice 2 : (15 points) *(Durée estimée : 40 min)*

Une banque constate que **2%** de ses clients ne sont pas solvables.

A) Une étude permet de constater que ***70%*** des clients non solvables émettent un chèque sans provision alors que cette proportion est de **3%** pour les clients solvables,.

On choisit un client au hasard et on définit les événements suivants :
E = « le client émet un chèque sans provision » ; S = « le client est solvable ».
1) Calculer la probabilité de E.
2) Un client a émis un chèque sans provision, quelle est la probabilité qu'il soit solvable ?

B) On choisit, d'une façon indépendante, **100** clients de cette banque et on définit la variable aléatoire: *X = « le nombre des clients non solvables parmi les **100** choisis ».*
1) Quelle est la loi exacte de X ? Donner son expression et calculer son espérance et sa variance.
2) En le justifiant, donner l'expression d'une loi approximative discrète de X.
3) En utilisant cette loi approximative, calculer la probabilité d'avoir au plus deux clients non solvables parmi les 100.

C) On choisit, d'une façon indépendante, **1600** clients de cette banque et on définit la variable aléatoire: *Y = « le nombre des clients non solvables parmi les **1600** choisis ».*
1) Quelle est la loi exacte de Y ? Donner son expression et calculer son espérance et son écart type.
2) En le justifiant, préciser une loi approximative continue de Y, et donner sa densité de probabilité.
3) En utilisant cette loi approximative, calculer la probabilité suivante : *P(25<Y<39).*

Remarque : Les parties **A)**, **B)** et **C)** sont indépendantes.

Extrait de la table de la fonction de répartition $\pi(u)$ de la loi normale centrée réduite

u	0,1	0,25	1,00	1,15	1,25	1,5	1,83	2,5
$\pi(u)=P(U<u)$	0,5398	0,5987	0,8413	0,8749	0.8943	0,9332	0,9664	0,9938

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2010/2011 (2ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections C & D

Professeur : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 1 h 30 min)*

N.B.
- *Arrondir les calculs à la **3ème** décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 points) *(Durée estimée : 25 min)*: (8

Une agence de location de voitures constate que **5%** des voitures louées tombent en panne. Etant donné qu'une semaine, **60** voitures ont été louées, indépendamment les unes des autres, chez cette agence. On considère la variable aléatoire *X* définie par :

X = «le nombre de voitures qui tombent en panne parmi les 6**0** louées»

1) Quelle est la loi de *X* ? Donner son expression, ainsi que son espérance et sa variance.
2) Calculer la probabilité que **deux** voitures louées tombent en panne.
3) En le justifiant, préciser une loi approximative discrète de *X*, et donner son expression.
4) En utilisant cette loi approximative, calculer les probabilités des événements suivants :
a) *A = « **deux** voitures louées tombent en panne »*. Comparer avec le résultat obtenu en **2)**.
b) *B = « **deux** voitures louées **au plus** tombent en panne »*.

Exercice 2 : (8 points) *(Durée estimée : 25 min)*

Les employés d'une usine sont répartis en trois catégories, les cadres qui représentent ***10%***, les techniciens qui représentent ***60%*** et les ouvriers qui représentent ***30%***. On sait que les taux de présence pour les trois catégories sont respectivement de ***92 %***, ***96 %*** et ***98 %***. On choisit au hasard un nom dans la liste des employés de cette usine et on définit les événements suivants :
C_1 = *« l'employé est un cadre »* ; C_2 = *« l'employé est un technicien »* ; C_3 = *« l'employé est un ouvrier»* et *A = « l'employé est absent»*.
1) déterminer les probabilités suivantes : $P(C_i)$ et $P(A/C_i)$ pour i = 1 ; 2 et 3.
2) Calculer la probabilité de l'événement *A*.
3) On sait que l'employé est absent ;
a) quelle est la probabilité qu'il soit un cadre ?
b) quelle est la probabilité qu'il soit un ouvrier ?
c) déduire de **a)** et **b)** la probabilité qu'il soit un technicien.

Exercice 3 : (6 points) *(Durée estimée : 20 min)*

Une machine fabrique des pièces mécaniques de forme cylindrique dont le diamètre en millimètres (mm) est une variable aléatoire continue *X* suivant une loi normale générale d'espérance ***15 mm*** et de variance ***0,25***. Les pièces fabriquées par cette machine sont contrôlées, et on considère qu'une pièce et normale si son diamètre est compris entre ***14,1 mm*** et ***15,9 mm***.
1) Donner l'expression de la fonction densité de probabilité de *X*.
2) Calculer la probabilité que le diamètre d'une pièce dépasse ***16 mm***.
3) Calculer la probabilité qu'une pièce soit normale.
4) Déduire le nombre des pièces défectueuses, sur ***1000*** pièces fabriquées par la machine.

Extrait de la table de la fonction de répartition π(u) de la loi normale centrée réduite (Valeurs arrondies)

u	*0,1*	*0,5*	*1*	*1,5*	*1,6*	*1,8*	*2*	*2,3*	*2,4*	*2,5*
$\pi(u) = P(U<u)$	*0,54*	*0,692*	*0,841*	*0,933*	*0,945*	*0,964*	*0,977*	*0,989*	*0,992*	*0,994*

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques, Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2011/2012 (2ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections C & D

Professeur : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 1 h 30 min)*

N.B.
- *Arrondir les calculs à la* ***3ème*** *décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (8 points) *(Durée estimée : 25 min)*

Une entreprise importe des climatiseurs auprès de trois pays A, B et C, dans les proportions respectives suivantes ***25%***, ***40%*** et ***35%***. On sait que les taux des climatiseurs défectueux, selon le pays, sont respectivement de ***4 %***, ***1 %*** et ***2 %***. On choisit au hasard un climatiseur importé par cette entreprise et on définit les événements suivants :
A = « le climatiseur provient du pays A» ; *B = « le climatiseur provient du pays B»* ; *C = « le climatiseur provient du pays C »* et *D = « le climatiseur est défectueux»*.

1) déterminer les probabilités suivantes : $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D/A)$, $P(D/B)$ et $P(D/C)$.
2) Calculer la probabilité de l'événement D.
3) Sachant que le climatiseur choisi est défectueux ;
- **a)** quelle est la probabilité qu'il provient du pays A ?
- **b)** quelle est la probabilité qu'il provient du pays B?
- **c)** déduire de **a)** et **b)** la probabilité qu'il provient du pays C.

Exercice 2 : (7 points) *(Durée estimée : 25 min)*

On suppose que le nombre des fausses alertes reçues par le standard d'un commissariat de police soit distribué selon une loi de Poison ; et on sait que le standard reçoive en moyenne **trois** fausses alertes par tranche de **deux heures**. On considère la variable aléatoire discrète définie par :

X = «le nombre des fausses alertes reçues par le standard pendant deux heures »

1) Quelle est la loi de X ? Donner son expression, ainsi que son espérance et sa variance.
2) Calculer la probabilité que le standard ne reçoive **aucune** fausse alerte pendant deux heures.
3) Calculer la probabilité que le standard reçoive au plus **deux** fausses alertes pendant deux heures.
4) On considère la variable aléatoire discrète suivante :

Y = «le nombre des fausses alertes reçues par le standard pendant une journée (24 heures) »

Déterminer la loi de Y et donner son expression, ainsi que son espérance et son écart type.

Exercice 3 : (5 points) *(Durée estimée : 20 min)*

Un magasin constate que **50%** de ses visiteurs effectuent un achat. Etant donné qu'un après midi, **64** personnes ont visité le magasin indépendamment les unes des autres.

On considère la variable aléatoire X définie par :

X = «le nombre des visiteurs ayant effectué un achat parmi les 64»

1) Quelle est la loi de X ? Donner son expression, ainsi que son espérance et son écart type.
2) Calculer la probabilité que **30** visiteurs effectuent un achat.
3) En le justifiant, préciser une loi approximative continue de X, et donner sa densité de probabilité.
4) En utilisant cette loi approximative, calculer la probabilité que :
- **a)** le nombre des visiteurs ayant effectué un achat ne dépasse pas **40**.
- **b)** le nombre des visiteurs ayant effectué un achat soit compris entre **26** et **38**.

Extrait de la table de la fonction de répartition $\pi(u)$ de la loi normale centrée réduite (Valeurs arrondies)

u	0,1	0,5	1	1,5	1,6	1,8	2	2,3	2,4	2,5
$\pi(u) = P(U<u)$	0,54	0,692	0,841	0,933	0,945	0,964	0,977	0,989	0,992	0,994

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques, Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2011/2012 (2ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections C & D

Professeur : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 (Durée 1h30min)
Session de rattrapage

N.B.
- *Arrondir les calculs à la **4** ^{ème} décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (6 points) *(Durée estimée : 15 min)*

Dans une ville de ***100000*** habitants, on a constaté que ***5%*** des habitants ne sont pas en faveur d'un projet municipal. On interroge ***80*** personnes différentes de cette ville et on désigne par :

X = « le nombre d'habitants interrogés et qui ne sont pas en faveur du projet ».

1) Quelle est la loi exacte de X ? Donner son domaine et son expression.
2) En le justifiant, donner les expressions des deux lois approximatives discrètes de X.
3) En utilisant la loi approximative convenable, calculer $P(X \leq 2)$.

Exercice 2 : (6 points) *(Durée estimée : 15 min)*

Soit une urne contenant ***40%*** de boules blanches et **60%** de boules noires. On procède à des tirages successifs avec remise d'une boule de cette urne, et on considère la variable aléatoire X définie par : X = « le nombre de tirages nécessaires pour avoir **deux** boules blanches »

1) Quelle est la loi de X ? Donnez son domaine et son expression.
2) Calculez l'espérance et la variance de X.
3) Calculez P(X=4).

Exercice 3 : (8 points) *(Durée estimée : 40 min)*

Dans un moulin, les sacs de farine de 25 Kilogrammes (Kg) sont remplis par une machine automatique. Une étude a permis de constater que le poids X en Kg, des sacs remplis, n'est pas parfait, mais il est distribué selon une loi normale générale d'espérance m et d'écart type σ.
Sachant que sur **3000** sacs remplis, on dénombre **363** sacs dont le poids est inférieur à **24,52** Kg et 35**7** sacs dont le poids est supérieur à **26,4** Kg.

1) Donner en fonctions de m et σ la densité de la variable aléatoire X associées au poids des sacs de farine.
2) Déterminer l'espérance m et l'écart type σ de la variable aléatoire X.
3) Calculer la probabilité d'avoir un sac de farine dont le poids est inférieur à **24,5** Kg.
4) Calculer la probabilité d'avoir un sac de farine dont le poids est supérieur à **26** Kg.

Extrait de la table de la fonction de répartition $\pi(u)$ de la loi normale centrée réduite

u	0,1	0,25	0,68	1,00	1,17	1,18	1,195	2,5
$\pi(u)=P(U<u)$	0,5398	0,5987	0,7517	0,8413	0,8790	0,8810	0,8840	0,9938

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2012/2013 (2ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections C & D
Professeur : S. BENHMIDA A

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 1 h 30 min)*

N.B.
- *Arrondir les calculs à la 3ème décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (5 points) *(Durée estimée : 15 min)*

On utilise un test sanguin pour le dépistage d'une maladie M qui touche 0,2% d'une population. Ce test est positif dans 98% des cas si la personne est malade et il est négatif dans 96% des cas si la personne n'est pas malade. On choisit au hasard une personne de la population et on définit les événements suivants :

M = « la personne est malade » et *T = « le test est positif »*.

1) Calculer les probabilités suivantes : $P(M);\ P(T/M);\ P(\overline{T}/\overline{M})$.
2) Calculer la probabilité que le test soit positif.
3) Si pour une personne le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit malade ?
4) Calculer la probabilité que le test ne se trompe pas (le test est positif et la personne est malade ou le test est négatif et la personne n'est pas malade).

Exercice 2 : (5 points) *(Durée estimée : 15 min)*

Soit une urne contenant ***40%*** de boules blanches et **60%** de boules noires. On procède à des tirages successifs avec remise d'une boule de cette urne, et on considère la variable aléatoire X définie par :

*X = « le nombre de tirages nécessaires pour avoir **trois** boules blanches »*

1) Quelle est la loi de *X* ? Donner son domaine et son expression.
2) Calculer l'espérance et la variance de X.
3) Calculer P(X=4).

Exercice 3 : (10 points) *(Durée estimée : 35 min)*

On suppose que le nombre *X*, de personnes qui passent par le service orientation d'une administration publique, par tranches de **dix minutes** entre 9 h et 11 h, suive une loi de Poisson de paramètre **λ = 3**.

A) Calculer la probabilité que le service reçoive entre 9 h et 9 h 10 :
1) Deux personnes.
2) Au moins deux personnes.

B) Soit *Y* le nombre de personnes qui passent par le service par tranches de **30 minutes** entre 9 h et 11 h.
1) Quelle est la loi de *Y* ? Donner son expression, son espérance et son écart type.
2) Calculer la probabilité que le service reçoive **5** personnes entre 10 h et 10 h 30.
3) Déterminer par l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff un majorant de la probabilité : $P(|Y-9|>5)$.

C) Soit *Z* le nombre total de personnes qui passent par le service entre 9 h et 11 h.
1) Quelle est la loi de *Z* ? Donner son espérance et son écart type.
2) En le justifiant, préciser une loi approximative continue de *Z*, et donner sa densité de probabilité.
3) En utilisant cette loi approximative, calculer la probabilité que le service reçoive au moins 30 personnes entre 9 h et 11 h.

Remarque : Les parties **A)**, **B)** et **C)** sont indépendantes.

Extrait de la table de la fonction de répartition π(u) de la loi normale centrée réduite (Valeurs arrondies)

u	*0,1*	*0,5*	*1*	*1,5*	*1,6*	*1,8*	*2*	*2,3*	*2,4*	*2,5*
π(u) = P(U<u)	*0,54*	*0,692*	*0,841*	*0,933*	*0,945*	*0,964*	*0,977*	*0,989*	*0,992*	*0,994*

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques, Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2012/2013 (2ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections C & D

Professeur : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 1h30min)* *Session de rattrapage*

N.B.
- *Arrondir les calculs à la **4** ème décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice : Traiter les trois parties indépendantes de cet exercice. *(Durée estimée : 70 min)*

Partie A (8 points) : Une entreprise importe un produit alimentaire auprés de trois pays E_1, E_2 et E_3, dans les proportions respectives de ***22 %***, ***35 %*** et ***43 %.*** D'après une longue expérience on constate que ***0,5%*** des produits importés du pays E_1 sont non conformes aux normes d'hygiène, alors que cette proportion et de ***1%*** pour le pays E_2 et de ***2%*** pour le pays E_3.

On choisit au hasard un produit importé par cette entreprise et on définit les événements suivants :
C = « le produit est conforme aux normes» et E_i = *« le produit est importé du pays* E_i» ; pour i = 1 ; 2 et 3.

1) déterminer les probabilités suivantes : $P(E_i)$ et $P(C/E_i)$ pour i = 1 ; 2 et 3.
2) Calculer la probabilité de l'événement *C*.
3) On sait qu'un produit est non conformes aux normes d'hygiène;
  a) quelle est la probabilité qu'il soit importé du pays E_1?
  b) quelle est la probabilité qu'il soit importé du pays E_2?
  c) déduire de **a)** et **b)** la probabilité qu'il soit importé du pays E_3.

Partie B (6 points) : On suppose que **1,25%** des produits importés par cette entreprise sont non conformes aux normes d'hygiène. On choisit au hasard et simultanément **80** produits dans un lot de **1200** produits importés et on considère la variable aléatoire définie par :

X = « le nombre des produits non conformes parmi les **80** choisis».

1) Quelle est la loi exacte de X ? Donner son domaine et son expression.
2) Calculer l'espérance et la variance de X.
3) En le justifiant, donner les expressions des deux lois approximatives discrètes de X.
4) Calculer, par les deux lois approximatives, la probabilité d'avoir les **80** produits choisis conformes aux normes.

Partie C (6 points) : On suppose que la quantité annuelle, **en milliers de tonnes**, importée par l'entreprise selon chaque pays, suit une loi normale générale et que les importations sont indépendantes d'un pays à l'autre. On note par Y_i la variable aléatoire continue associée à la quantité annuelle importée du pays E_i, pour i = 1 ; 2 et 3. On donne les espérances respectives de Y_1, Y_2 et Y_3 par **170 ; 280 ; 350** ainsi que les écart-types correspondant par **8 ; 4 ; 8**.

1) Calculer la probabilité que la quantité annuelle importée du pays E_2 ne dépasse pas **285 000 tonnes**.
2) Calculer la probabilité que la quantité annuelle importée du pays E_3 soit comprise ente **340 000** et **370 000 tonnes**.
3) Soit *Y* la variable aléatoire associée à toute la quantité annuelle des produits importée par l'entreprise.
  a) Quelle est la loi de *Y* ? Déterminer sa moyenne et son écart type.
  b) Calculer la quantité annuelle maximale que l'entreprise peut importer avec une probabilité de ***0,98***.

Extrait de la table de la fonction de répartition $\pi(u)$ de la loi normale centrée réduite (Valeurs arrondies)

u	0,1	0,5	0,8		1	1,25	1,6	2,05	2,3	2,4	2,5
$\pi(u) = P(U<u)$	0,54	0,692	0,788		0,841	0,894	0,945	0,98	0,989	0,992	0,994

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2013/2014 (2ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections C & D

Professeur : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 1 h 30 min)*

N.B.
- *Arrondir les calculs à la **3ème** décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (4 points) *(Durée estimée : 15 min)*

Trois ingénieurs A, B et C se penchent indépendamment les uns des autres sur la résolution d'un problème. Ils ont respectivement **50%**, **60%** et **80%** de chance de résoudre le problème. Quelle est la probabilité que :

1) le problème soit résolu par les trois ingénieurs?
2) le problème ne soit résolu par aucun des trois ingénieurs ?
3) le problème soit résolu par un seul ingénieur?
4) le problème soit résolu par A et B sachant qu'il est résolu par C ?

Exercice 2 : (6 points) *(Durée estimée : 20 min)*

Les salariés d'une entreprise comprennent 20 % de cadres et 80 % d'employés. On sait que 60 % des cadres parlent l'anglais alors que cette proportion n'est que de 10 % pour les employés. On choisit au hasard un salarié et on définit les événements suivants :

A = « le salarié parle l'anglais» ; C= « le salarié est un cadre » et E= « le salarié est un employé».

1) Calculer les probabilités suivantes : $P(C);\ P(E);\ P(A/C)$ *et* $P(A/E)$.
2) Calculer la probabilité de A
3) Un salarié ne parle pas l'anglais. Quelle est la probabilité qu'il soit un cadre?
4) Un salarié ne parle pas l'anglais. Calculer de deux façons la probabilité qu'il soit un employé.

Exercice 3 : (6 points) *(Durée estimée : 20 min)*

On suppose que le nombre X de réclamations reçues chaque jour par le service après-vente d'un magasin, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.

1) Calculer la probabilité de recevoir un jour donné :
- **a)** Une seule réclamation.
- **b)** Au plus deux réclamations.

2) Le magasin est fermé le dimanche. Soit Y la variable aléatoire associée au nombre de réclamations reçues chaque semaine par le service après-vente du magasin.
- **a)** Quelle est la loi de probabilité de Y? Donner son expression.
- **b)** Calculer l'espérance et l'écart type de Y
- **c)** Déterminer par l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff un majorant de la probabilité : $P(|Y-12|>4)$.

Exercice 4 : (4 points) *(Durée estimée : 15 min)*

Une machine automatique remplit des petits sachets de café dont le poids X en gramme (g) est distribué selon une loi normale générale d'espérance ***m =50g*** et d'écart type ***σ =4g***.

1) Donner l'expression de la fonction densité de probabilité de X.
2) Calculer la probabilité que le poids d'un sachet soit d'au moins ***48g***.
3) Calculer la probabilité que le poids d'un sachet soit compris entre ***45g*** et ***55g***.
4) Une usine utilise une chaîne de 25 machines indépendantes du même type précédent. Soit Y la variable aléatoire associée au poids en gramme d'une caisse contenant 25 petits sachets de café remplis par cette chaîne. Quelle est la loi de probabilité de Y? Calculer son espérance et son écart type.

Extrait de la table de la fonction de répartition π(u) de la loi normale centrée réduite (Valeurs arrondies)

u	*0,1*	*0,5*	*1*	*1,25*	*1,5*	*1,8*	*2*	*2,3*	*2,4*	*2,5*
π(u) = P(U<u)	*0,54*	*0,692*	*0,841*	*0,894*	*0,933*	*0,964*	*0,977*	*0,989*	*0,992*	*0,994*

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
- Fès-

Année Universitaire 2013/2014 (2ème semestre)
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives II
Sections C & D

Professeur : S. BENHMIDA

Epreuve de Statistique 2 *(Durée 1h30min)*
Session de rattrapage

N.B.
- *Arrondir les calculs à la **3ème** décimale.*
- *Bien présenter la copie.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 : (5 points) *(Durée estimée : 15 min)*

Dans un pays, **40 %** de la population active sont des femmes. On sait que parmi les femmes de cette population active **8 %** sont au chômage, alors que parmi les hommes cette proportion est de **10 %**. On choisit au hasard une personne de cette population active, et on considère les événements suivants :

C =" la personne est au chômage" ; F = "la personne est une femme" et *H= " la personne est un homme".*

1) Quelles sont les probabilités *P(F) ; P(H) ; P(C/F)* et *P(C/H)* ?

2) Calculer la probabilité que la personne choisie soit au chômage.

3) Sachant que la personne choisie est au chômage, quelle est la probabilité qu'elle soit un homme? On en déduire la probabilité que cette personne soit une femme.

Exercice 2 : (10 points) *(Durée estimée : 40 min)*

Dans une coopérative laitière, des sacs d'un demi litre de lait sont remplis indépendamment les uns des autres par une machine, avec un taux de défectuosité de **5 %**.

1) Pour assurer le bon fonctionnement de cette machine, on procède à un contrôle de la machine dès l'apparition du **3ème** sac défectueux. On suppose que cette machine peut remplir un nombre quelconque de sacs lorsqu'elle fonctionne normalement. On considère la variable aléatoire suivante :

X = « le nombre de sacs remplis par la machine avant le premier contrôle ».

a) Quelle est la loi de *X* ? Donner son domaine et son expression.
b) Calculer l'espérance et la variance de X
c) Calculer la probabilité *P(**X** =20).*

2) On considère un lot de **1000** sacs de lait remplis par cette machine et on y prélève simultanément **60** sacs.

On pose : *Y* = « le nombre de sacs défectueux parmi les 60 ».

a) Quelle est la loi de *Y ?* Donner son domaine et son expression.
b) Calculer *E(Y)* et *V(Y).*
c) En le justifiant, donner les expressions des deux lois approximatives discrètes de Y.
d) Calculer, par les deux lois approximatives, la probabilité d'avoir ***deux*** sacs défectueux parmi les 60.

Exercice 4 : (5 points) *(Durée estimée : 20 min)*

La durée de vie en **milliers d'heures** d'un appareil électronique est une variable aléatoire continue *X* de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{0{,}02\pi}} e^{\frac{-(x-5)^2}{0{,}02}} \quad \forall x \in R$$

1) Déterminer l'espérance et l'écart type de *X* en **milliers d'heures**.

2) Quelle est la probabilité que la durée de vie ne dépasse pas ***5200 heures*** ?

3) Quelle est la probabilité que la durée de vie soit comprise entre ***4850*** et ***5120*** *heures* ?

4) Déterminer la durée de vie **minimale** d_m que l'entreprise peut atteindre avec une probabilité de ***0,95***.

Extrait de la table de la fonction de répartition π(u) de la loi normale centrée réduite (Valeurs arrondies)

u	*0,1*	*0,5*	*1*	*1,2*	*1,5*	*1,645*	*2*	*2,3*	*2,4*	*2,5*
π(u) = P(U<u)	*0,54*	*0,692*	*0,841*	*0,885*	*0,933*	*0,95*	*0,977*	*0,989*	*0,992*	*0,994*